

Colegios
TRILCE



Aritmética
2º Año

ÍNDICE

UNIDAD 1 FRACCIONES

Capítulo 1 Números fraccionarios	5	Capítulo 6 Expresiones decimales: Fracción generatriz.....	37
Capítulo 2 Operaciones con fracciones.....	12	Capítulo 7 Operaciones con números decimales.....	42
Capítulo 3 Aplicación de fracciones (Parte I)	19	Capítulo 8 Ejercicios de texto con números decimales	46
Capítulo 4 Aplicación de fracciones (Parte II).....	26	Capítulo 9 Repaso	48
Capítulo 5 Complemento	34		

UNIDAD 2 NUMERACIÓN

Capítulo 1 Numeración decimal.....	51	Capítulo 3 Relación entre sistemas de numeración	65
Capítulo 2 Numeración en otras bases	58		

UNIDAD 2 ¿RED NEURONAL ARTIFICIAL?

Capítulo 1 Conteo de números. Progresión aritmética.....	72	Capítulo 4 Método combinatorio.....	86
Capítulo 2 Conteo de números. Paginación	78	Capítulo 5 Repaso	91
Capítulo 3 Complemento	84		

UNIDAD 4 ¿MULTIPLICANDO CON LÍNEAS?

Capítulo 1 Cuatro operaciones: Adición	94	Capítulo 4 División.....	116
Capítulo 2 Sustracción.....	103	Capítulo 5 Complemento	123
Capítulo 3 Multiplicación.....	110	Capítulo 6 Cuatro operaciones combinadas	125

Aritmética

UNIDAD 5 LA RAÍZ CUADRADA

Capítulo 1 Potenciación	133
Capítulo 2 Radicación	139

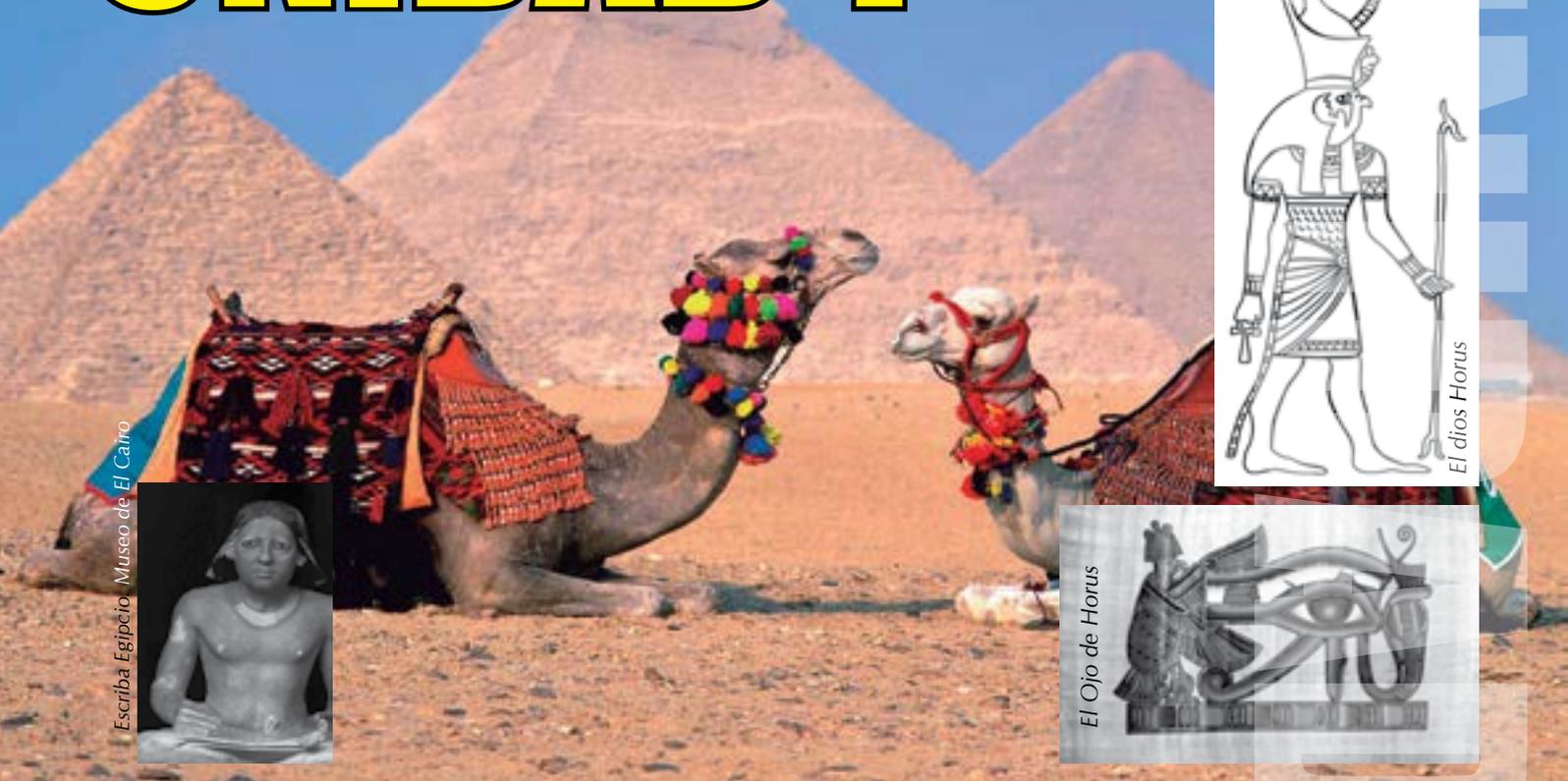
Capítulo 3 Repaso	145
-----------------------------------	-----

UNIDAD 6 TEORÍA DE LOS NÚMEROS

Capítulo 1 Divisibilidad y multiplicidad	148
Capítulo 2 Operaciones y ecuaciones con múltiplos	154
Capítulo 3 Criterios de divisibilidad	160
Capítulo 4 Complemento	166

Capítulo 5 Números primos	167
Capítulo 6 Análisis de divisores	173
Capítulo 7 Repaso	179

UNIDAD 1



Fracciones

¿Egipto conoció a los fraccionarios?

A lrededor de 3000 años antes de Cristo, los egipcios crearon una manera de escribir algunos de los números que hoy llamamos fraccionarios. Solo escribían números fraccionarios de la forma $\frac{1}{n}$ así pues los egipcios utilizaron las fracciones cuyo numerador es 1 y cuyo denominador es 2; 3; 4; ..., y las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ y con ellas conseguían hacer cálculos fraccionarios de todo tipo. Su notación era la siguiente:

$$\begin{array}{c} \text{—} \\ \text{—} \end{array} = \frac{1}{2}, \quad \begin{array}{c} \text{○} \\ \text{|||} \end{array} = \frac{1}{3}, \quad \begin{array}{c} \text{○} \\ \text{||||} \end{array} = \frac{1}{4}, \quad \begin{array}{c} \text{○} \\ \text{|||||} \end{array} = \frac{1}{6}, \quad \text{⊕} = \frac{2}{3}$$

- ¿Cómo se escribirá: $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$?

APRENDIZAJES ESPERADOS



Comunicación matemática

- Reconocerán las fracciones como números que permitan representar cantidades
- Relacionarán las fracciones y sus representaciones gráficas
- Identificarán familias de fracciones.

Razonamiento y demostración

- Establecerán relaciones de orden entre fracciones.

Resolución de problemas

- Resolverán las operaciones básicas con las fracciones
- Resolverán problemas que implican realizar operaciones con fracciones
- Utilizarán las fracciones para resolver problemas de contexto real.

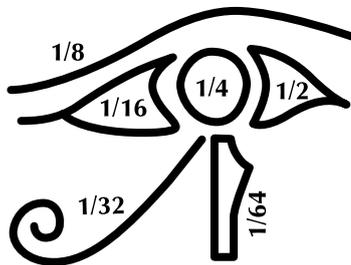
Números fraccionarios

En este capítulo aprenderemos:

- A establecer relaciones de orden entre fracciones.

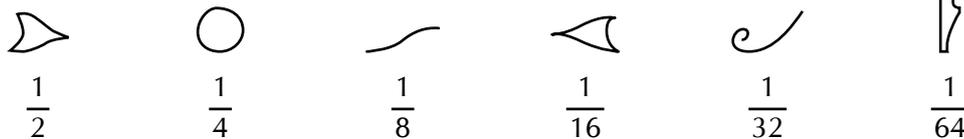
El Ojo de Horus

De acuerdo a la mitología egipcia el dios Horus, era hijo de Osiris y de la diosa solar Isis, se dice que Horus había perdido su ojo en una batalla contra Set.



Asimismo los egipcios también utilizaban otras subunidades del Ojo de Horus, para expresar las fracciones $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{32}$ y $\frac{1}{64}$.

Estas fracciones estaban representadas como una parte del "Ojo de Horus".



Como anécdota, la suma de estas fracciones no da la totalidad, es decir 1, sino que le falta una pequeña parte, la fracción que falta era considerada como la parte que perdió Horus en su lucha contra Set.

- ¿Qué parte del "Ojo" perdió "Horus"?

Saberes previos

Completa con letras:

			Conjunto \mathbb{Z}	El MCD de 8 y 18				
				Sur, Oeste				
	1 es el único divisor común				">" se lee		Desciende	
							"<" se lee	
$4 + 3 \times 2$	El MCD de 15 y 14			Hermana de tu tía			M	
				Capital de Italia				
Conjunto \mathbb{N}							A	
El MCM de 6 y 4								
	Primer número natural							
	500 en romanos							
	Los #, 2; 3; 5; 7; 11; ...							
	Vocal							
				Verbo			Palíndromo	
				Vocal			Nota musical	
	Primer # natural positivo	$1 + 2 \times 3$					Ascenden	
	Vocal							

Conceptos básicos

Número racional

Es todo aquel número que puede ser expresado como $\frac{a}{b}$ de modo que:

$$a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0$$

➔ Ejemplo:

$$49; \frac{2}{9}; 2,5; -\frac{3}{5}; 2\frac{1}{7}; -10$$

Número fraccionario

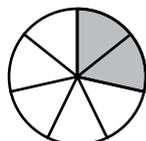
Definición

Es aquel número racional que no es entero

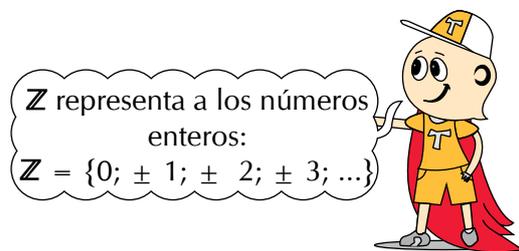
Términos

Los términos de una fracción son: $\frac{a}{b}$ → Numerador
 $\frac{a}{b}$ → Denominador

Representación gráfica



$\frac{2}{7}$ ← Numerador: cantidad de partes a pintar
 $\frac{2}{7}$ ← Denominador: Cantidad de partes en que se divide



Clasificación de fracciones

Por la comparación de sus términos

Fracciones propias

El numerador de esta fracción es menor que el denominador

$$f = \frac{a}{b} \text{ es propia, si: } a < b$$

➔ Ejemplo:

$$\frac{2}{7}, \frac{12}{37}, \frac{18}{101}$$

Fracciones impropias

El numerador de esta fracción es mayor que el denominador

$$f = \frac{a}{b} \text{ es impropia, si: } a > b$$

➔ Ejemplo:

$$\frac{32}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{11}$$

Por su denominador

Fracciones decimales

El denominador de esta fracción es una potencia de 10.

$$f = \frac{a}{b} \text{ es decimal, si: } b = 10^n$$

➔ Ejemplo:

$$\frac{2}{10}, \frac{12}{1\,000}, \frac{18}{100}$$

Fracciones ordinarias

El denominador de esta fracción no es potencia de 10.

$$f = \frac{a}{b} \text{ es ordinaria, si: } b \neq 10^n$$

➔ Ejemplo:

$$\frac{32}{70}, \frac{12}{7}, \frac{18}{110}$$

Por los divisores de sus términos

Fracciones reductibles

El denominador y numerador tienen divisores comunes

$$f = \frac{a}{b} \text{ es reductible, si: } \text{MCD}(a; b) \neq 1$$

➔ Ejemplo:

$$\frac{2}{12}, \frac{12}{100}, \frac{108}{30}$$

Fraciones irreducibles

El único divisor común del denominador y numerador de esta fracción es la unidad

$$f = \frac{a}{b} \text{ es irreducible, si "a" y "b" son PESI}$$



➔ Ejemplo:

$$\frac{32}{7}; \frac{12}{13}; \frac{18}{11}$$

Por grupos

Fraciones homogéneas

Los denominadores de estas fracciones son iguales

$$\frac{a}{b}; \frac{c}{b} \text{ son homogéneas}$$

➔ Ejemplo:

$$\frac{2}{12}; \frac{13}{12}; \frac{118}{12}$$

Fraciones heterogéneas

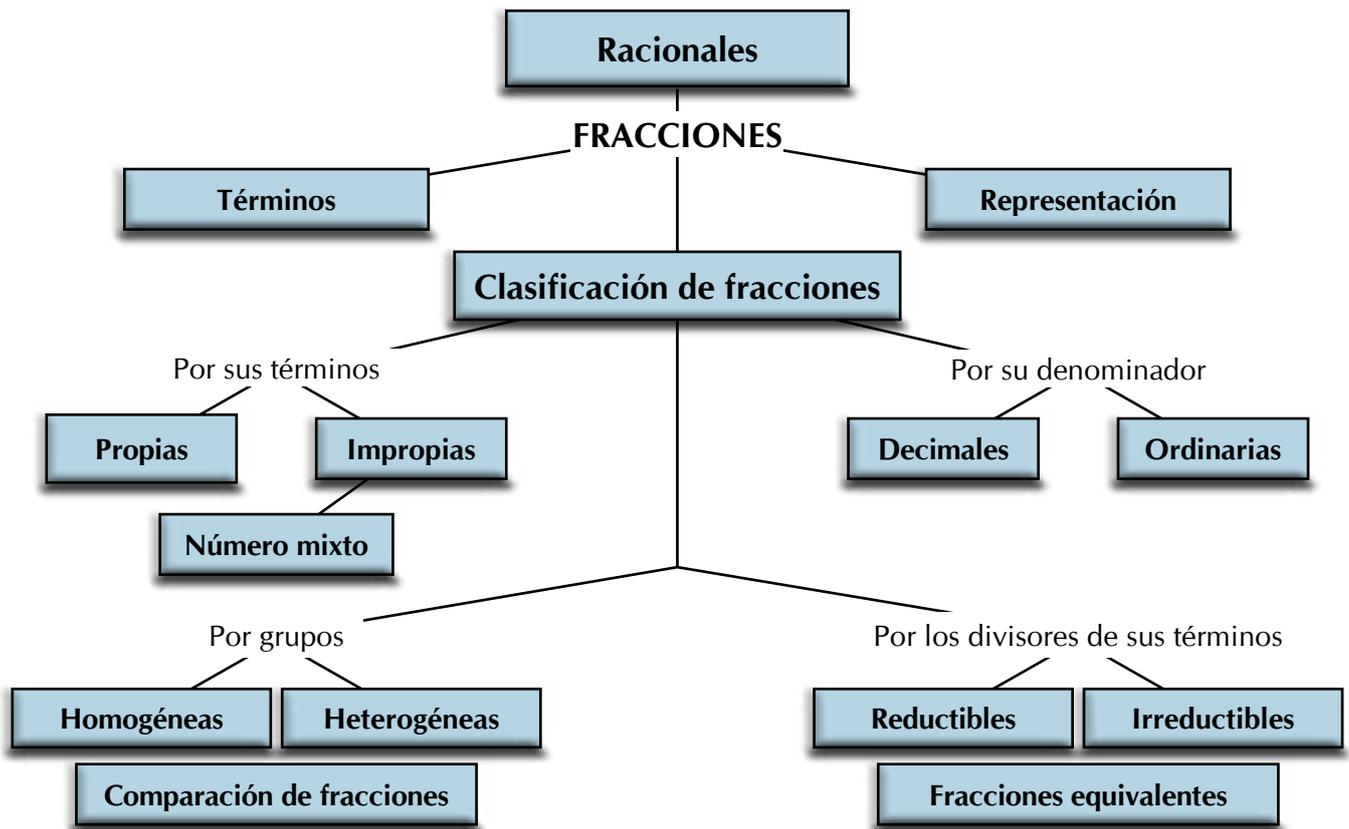
Los denominadores de estas fracciones son diferentes

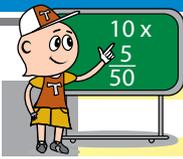
$$\frac{a}{b}; \frac{c}{d} \text{ son heterogéneas, si: } b \neq d$$

➔ Ejemplo:

$$\frac{12}{7}; \frac{18}{110}$$

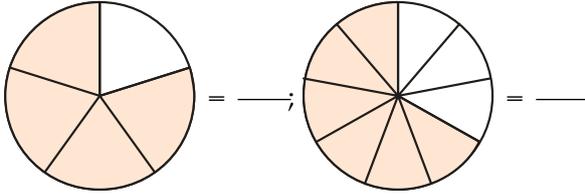
Síntesis teórica





Aplica lo comprendido

1. Complete:



2. Represente la fracción en número mixto

$$\frac{48}{7} = \square \frac{\square}{\square} \quad \frac{59}{12} = \square \frac{\square}{\square}$$

3. Represente el número mixto en fracción:

$$\bullet \ 2\frac{3}{5} = \text{---} \quad \bullet \ 4\frac{7}{8} = \text{---}$$

4. Buscando fracciones equivalentes, complete:

$$\bullet \ \frac{36}{60} < > \frac{\quad}{30} < > \frac{9}{\quad}$$

$$\bullet \ \frac{36}{60} < > \frac{\quad}{5} < > \frac{\quad}{45} < > \frac{21}{\quad}$$

5. Complete con "<", ">" o "="

$$\frac{12}{7} \bigcirc \frac{12}{11}$$

$$\frac{9}{14} \bigcirc \frac{11}{14}$$

$$\frac{12}{5} \bigcirc \frac{20}{5}$$



Aprende más

1. ¿Cuántas fracciones propias reductibles tienen como denominador a 24?

2. Reducir la fracción 60/84 hasta encontrar una fracción equivalente e irreductible. Halla la suma de sus términos

3. Ordene las siguientes fracciones:

$$a = \frac{7}{12}; b = \frac{3}{4}; c = \frac{5}{12}; d = \frac{1}{3}$$

en forma ascendente.

4. Determina una fracción equivalente a 3/8 de modo que la suma de sus términos es 132. ¿Cuál es la suma de cifras de su denominador?

5. Ordena de mayor a menor las siguientes fracciones.

a) $\frac{2}{5}; \frac{3}{10}; \frac{5}{20}; \frac{3}{15}$

b) $\frac{3}{5}; \frac{4}{7}; \frac{12}{70}$

c) $\frac{2}{4}; \frac{3}{9}; \frac{3}{12}; \frac{7}{8}$

6. Simplifica estas fracciones hasta obtener fracciones irreductibles.

a) $\frac{12}{18} =$ b) $\frac{24}{64} =$

c) $\frac{120}{600} =$ d) $\frac{48}{240} =$

7. ¿Cuántas fracciones propias e irreductibles tienen como denominador a 36?

8. Determina una fracción equivalente a 36/60 de modo que la suma de sus términos sea 56. Dar como respuesta la suma de cifras del denominador.

9. ¿Cuántas fracciones con denominador 12 son mayores que 1/3 pero menores que 3/4?

10. Dada la fracción 11/15, si le agregamos 13 a su numerador y denominador y luego simplificamos hasta obtener la fracción equivalente irreductible, entonces de las proposiciones:

- I. Los términos son consecutivos
- II. Es equivalente a 11/15
- III. La suma de sus términos es 13

Las verdaderas son:

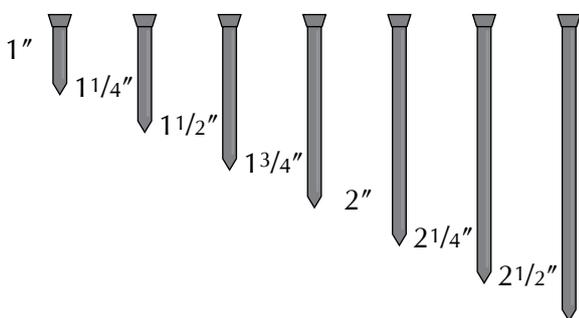
- a) Solo I b) Solo II c) Solo III
- d) I y II e) I y III

- 11.** Si a los dos términos de una fracción reducida a simple expresión, se le suma el doble del denominador y al resultado se le resta la fracción resulta la misma fracción. ¿Cuál es la fracción original?
- 12.** Calcular la fracción equivalente a $\frac{123}{287}$, de modo que la suma de sus términos es 40. Dar como respuesta la suma de las cifras del numerador.
- 13.** Indica la verdad o falsedad de estas proposiciones:
- Existen infinitas fracciones entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$.
 - Todo número mixto es equivalente a una fracción impropia

Aplicación cotidiana

Clavos de carpintería

En una ferretería se muestra el siguiente aviso:



Como se observa, se refiere a la medida en pulgadas de los clavos para carpintería.

- 14.** La medida de los clavos de mayor tamaño es:
- 15.** Si el grosor del tablero de una mesa es $\frac{12}{7}$ pulgadas, ¿qué medidas puede escoger el carpintero, si el clavo debe atravesar el grosor de la mesa?



¡Tú puedes!

- 1.** ¿Cuántas fracciones propias e irreducibles tienen como denominador a 120?
- a) 40 b) 48 c) 60 d) 36 e) 32
- 2.** Determina la fracción equivalente a $\frac{376}{705}$, cuya suma de sus términos es 46. Dar como respuesta la suma de cifras del denominador.
- a) 7 b) 3 c) 12 d) 9 e) 6
- 3.** Si: $\frac{\overline{ab}}{bb}$ es equivalente a $\frac{3}{11}$, hallar: $b - a$.
- a) 4 b) 5 c) 2 d) 1 e) 3
- 4.** Hallar la fracción propia e irreducible $\frac{m}{n}$, sabiendo que la fracción equivalente a $\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$ tiene como producto de términos a 840.
- a) $\frac{7}{9}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{10}$ d) $\frac{3}{7}$ e) $\frac{4}{7}$
- 5.** Hallar una fracción que no cambia su valor al sumar 5 unidades a su numerador y 9 unidades a su denominador.
- a) $\frac{15}{29}$ b) $\frac{15}{28}$ c) $\frac{15}{27}$ d) $\frac{16}{27}$ e) $\frac{13}{27}$



Practica en casa

1. ¿Cuántas fracciones propias e irreducibles tienen como denominador al 12?
2. El numerador de una fracción decimal propia es 425. Si esta fracción debe ser la mayor posible, ¿cuál es la diferencia de sus términos?
3. Reducir la fracción $\frac{16}{28}$ hasta encontrar una fracción equivalente e irreducible. Halla la suma de sus términos
4. Determina una fracción equivalente a $\frac{3}{5}$ de modo que la suma de sus términos es 136. ¿Cuál es la suma de cifras de su denominador?
5. Simplifica estas fracciones hasta obtener fracciones irreducibles.

$\frac{120}{180}$	$\frac{48}{64}$	$\frac{180}{600}$
-------------------	-----------------	-------------------
6. ¿Cuántas fracciones con denominador 18 son mayores que $\frac{1}{3}$ pero menores que $\frac{5}{6}$?
7. ¿Cuántas fracciones propias e irreducibles tienen como denominador a 18?
8. Determina una fracción equivalente a $\frac{36}{84}$ de modo que la suma de sus términos sea 60. Dar como respuesta la suma de cifras del denominador.
9. Ordena las fracciones:
 $a = \frac{9}{15}$; $b = \frac{11}{12}$; $c = \frac{5}{6}$ y $d = \frac{7}{60}$
 en forma ascendente.
10. ¿Cuántas fracciones propias e irreducibles tienen como denominador a 15?
11. Calcular la fracción equivalente a $\frac{188}{329}$, de modo que la suma de sus términos es 44. Dar como respuesta la suma de cifras del numerador

Enunciado

El desfile por Fiestas patrias se dará inicio a $\frac{11}{12}$ del mes de julio.

12. ¿Qué día será dicho desfile?
13. ¿A qué hora se dará inicio el desfile?

Aplicación cotidiana

Ya en el siglo XX, el 21 de mayo de 1904 se funda la Federación Internacional del Fútbol Asociado (FIFA) y por primera vez se establecen reglas mundiales, algunas de ellas son:

Periodos de juego: El partido durará dos tiempos iguales de $\frac{3}{4}$ de hora cada uno.

Intervalo del medio tiempo: Los jugadores tienen derecho a un descanso en el medio tiempo. El descanso del medio tiempo no deberá exceder de $\frac{1}{4}$ de hora.

14. ¿Cuánto tiempo en horas dura un partido de fútbol considerando el descanso de $\frac{1}{9}$ de hora?
15. Si el descanso es de $\frac{1}{9}$ de hora, ¿qué fracción de todo el juego es el descanso?

Operaciones con fracciones

En este capítulo aprenderemos:

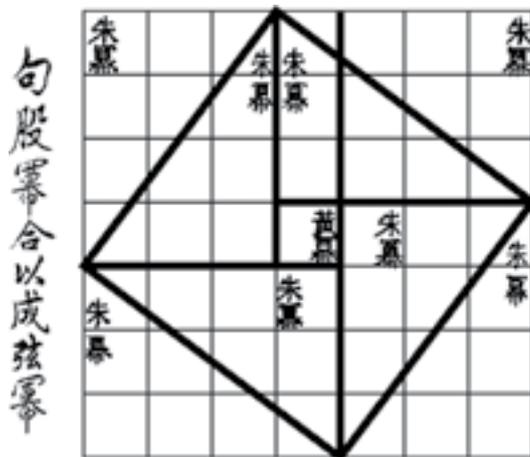
- A resolver las operaciones básicas con las fracciones

El Chou pei suan ching

Las civilizaciones de China y de la India son más antiguas que las de Grecia y Roma, por ello Chou Pei Suan Ching, se considera como el más antiguo de los clásicos de contenido matemático.

Algunos historiadores consideran el Chou Pei como un buen ejemplo de lo que era la matemática china del 1200 a.C. aproximadamente.

El libro está escrito en forma de diálogo entre un príncipe y su ministro sobre el calendario; el ministro explica a su soberano que el arte de los números deriva del círculo y del cuadrado, de los que el cuadrado pertenece a la tierra y el círculo a los cielos. Las palabras "Chou Pei" parecen referirse al estudio de las órbitas circulares en los cielos.



Los chinos en este compendio explican bien las operaciones con fracciones ordinarias, hasta el punto de que en este contexto hallaban el mínimo común denominador de varias fracciones. Al igual que hacían en otras materias, también aquí establecían analogías, refiriéndose al numerador como "el hijo" y al denominador como "la madre"; el énfasis generalizado en toda la cultura china sobre los principios del yin y el yang hacía más fácil seguir las reglas para manipular fracciones.



Saberes previos

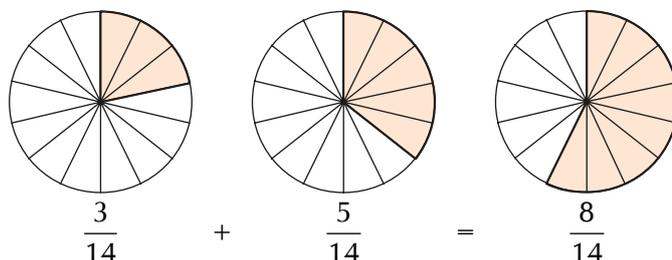
Completa con letras:

		Único primo par El MCM de 6; 4 y 3	COLEGIO TRILCE			12 y 25 son ... entre sí		Vocales Representa la unión
	$\frac{2}{3}; \frac{5}{4}; \frac{7}{9}; \frac{3}{7}$		Enero, Agosto ... De 12; 18 y 30 el 6 es			El MCM de 12; 15 y 20 Uno en el dado		
$\frac{2}{9}; \frac{4}{9}; \frac{5}{9}; \frac{7}{9}$								
$\frac{1}{2}$								
					El MCD de 12; 18 y 36 Azufre y carbono			
				"<" se lee				
				Vocales				
				Mil en romanos Símbolo de nitrógeno			51 en romanos Azufre	
$\frac{1}{6}$								

Conceptos básicos

Adición y sustracción

Fracciones homogéneas



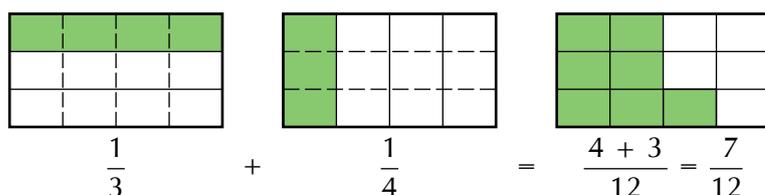
Como los denominadores son comunes, las adiciones y sustracciones se realizan con los numeradores.

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n} = \frac{a + b - c}{n}$$

➔ Ejemplo:

$$E = \frac{7}{12} - \left(\frac{4}{12} - \frac{1}{12} \right) = \frac{7}{12} - \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{7 - 4 + 1}{12} \Rightarrow E = \frac{4}{12}$$

Fracciones heterogéneas



Homogenizar las fracciones, para luego realizar las adiciones y sustracciones

➔ Ejemplo:

$$E = \frac{2}{5} + \frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{2 \times 12 + 3 \times 15 - 5 \times 5}{60} = \frac{44}{60} \Rightarrow E = \frac{11}{15}$$

➔ Ejemplo:

$$\frac{5}{8} + \frac{2}{15} = \frac{5 \times 15 + 2 \times 8}{8 \times 15} = \frac{91}{120}$$

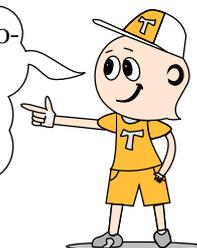
El común denominador es el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$\begin{array}{r|l} 4 & - & 5 & - & 12 & 3 \\ 4 & & 5 & & 4 & 4 \\ 1 & & 5 & & 1 & 5 \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & & & \text{m.c.m.} = 60 \end{array}$$



Para la suma de dos fracciones (método del aspa)

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{a \cdot n + b \cdot m}{m \cdot n}$$



Multiplicación

La fracción producto tiene como numerador al producto de los numeradores y como denominador al producto de los mismos.

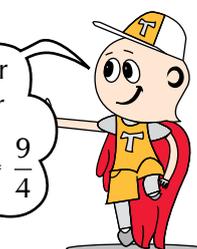
$$\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{a \times m}{b \times n}$$

➔ Ejemplo:

$$E = \frac{12}{25} \times \frac{40}{27} = \frac{12 \times 40}{25 \times 27} = \frac{480}{675} \Rightarrow E = \frac{32}{45}$$

Se puede simplificar antes de multiplicar

$$\frac{12}{25} \times \frac{75}{16} = \frac{3 \times 3}{1 \times 4} = \frac{9}{4}$$



División

Recordemos que la división es la operación inversa a la multiplicación, entonces:

$$\frac{a}{b} \div \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m} = \frac{a \cdot n}{b \cdot m}$$

➔ Ejemplo:

$$\frac{12}{36} \div \frac{8}{25} = \frac{12}{36} \times \frac{25}{8} = \frac{12 \times 25}{36 \times 8} \Rightarrow \text{Simplificando: } \frac{25}{24}$$

En fracción de fracción

$$\left[\frac{\frac{a}{b}}{\frac{m}{n}} \right] = \frac{a \cdot n}{b \cdot m}$$

➔ Ejemplo:

$$\frac{2\frac{3}{5}}{3\frac{2}{7}} = \frac{\frac{5 \times 2 + 3}{5}}{\frac{7 \times 3 + 2}{7}} = \frac{\frac{13}{5}}{\frac{23}{7}} = \frac{13 \times 7}{5 \times 23} \Rightarrow \text{Reduciendo: } \frac{91}{115}$$



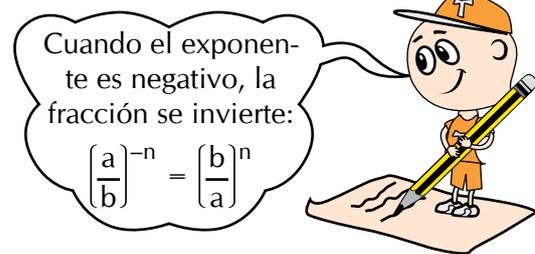
Potenciación

La fracción potencia, es la potencia del numerador entre la potencia del denominador:

$$\left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

➔ Ejemplo:

$$\left(\frac{3}{5} \right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$$



Radicación

La fracción raíz, se obtiene del cociente de la raíz del numerador entre la raíz del denominador:

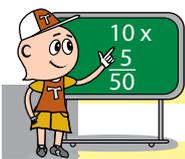
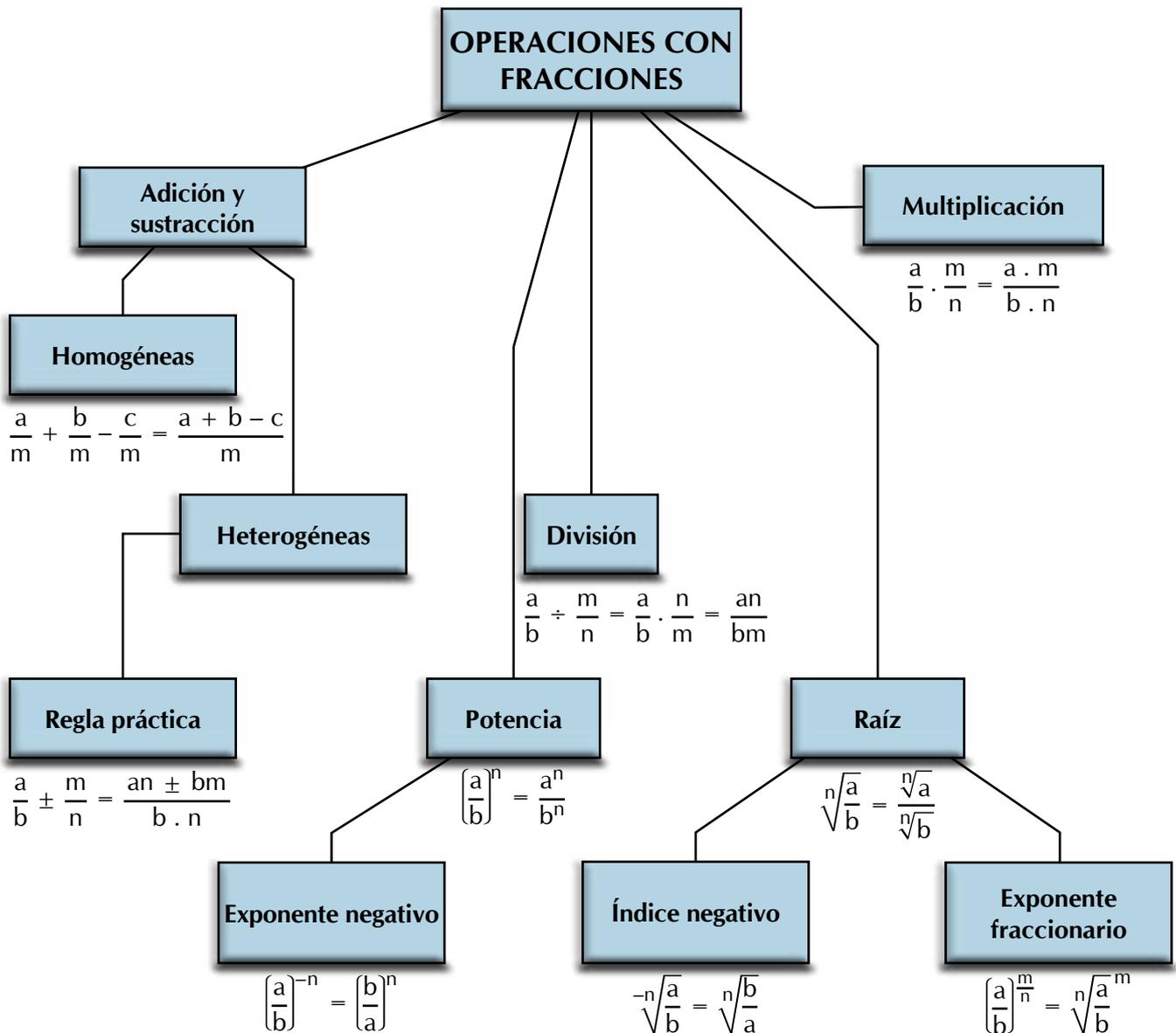
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

➔ Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{2}{3}$$



Síntesis teórica



Aplica lo comprendido

1. Calcula:

$$\bullet \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \text{---} = \text{---}$$

$$\bullet \left(\frac{120}{150}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \text{---}$$

2. Completa:

$$\bullet \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{\text{---}}}{\sqrt[3]{\text{---}}} = \text{---}$$

$$\bullet \sqrt{\frac{50}{18}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{\text{---}}}{\sqrt{9}} = \text{---}$$

3. Completa:

$$\bullet \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{\text{---}}{81}} = \text{---}$$



Aprende más

1. Calcular: $\frac{7}{5} + \frac{8}{15} + \frac{11}{60}$

2. Calcular: $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} + 1\frac{1}{6}$

3. Calcular: $7\frac{7}{10} - 4\frac{8}{15}$

4. Calcular: $4\frac{1}{6} + 3\frac{3}{10} - 2\frac{7}{15}$

5. Calcular: $7\frac{2}{3} \times \frac{11}{46} \times \frac{1}{121} \times 69$

6. Calcular: $\frac{11}{36} \times \frac{18}{121} \times 2\frac{3}{5} \times \frac{2}{13} \times 55$

7. Calcular: $2\frac{3}{5} \div 3\frac{9}{10}$

8. Calcular: $\frac{\frac{1}{3} \div 8}{2 - \frac{5}{6}}$

9. Reducir: $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \left(1 + \frac{1}{4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{5}\right)$

10. Simplificar: $\frac{\frac{6}{5} + \frac{1}{6}}{\frac{7}{3} - \frac{3}{10}} \times \frac{61}{41}$

11. Reducir: $\left(\frac{\frac{3}{4} \times 4 \times \frac{1}{6}}{\frac{5}{6} \times 6 \times \frac{1}{10}}\right)^3$

12. Reducir: $\sqrt{1\frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{3}{11}\right) \times \left(4 - \frac{6}{7}\right)}$

13. Al simplificar el producto:

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

se obtiene:

14. Efectuar:

$$\frac{1}{3\frac{1}{5}} - \frac{2\frac{1}{4}}{9} + \frac{3\frac{5}{8}}{2} + \frac{4}{4\frac{4}{7}}$$

15. Simplificar:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}}}$$

Aplicación cotidiana

Pisco Sour

El pisco del Perú se produce desde fines del siglo XVI, y el cóctel llamado pisco sour se originó en Lima en los años veinte del siglo XX en el Bar Morris, en el Jirón de la Unión del centro de Lima. El inventor de la fórmula fue el californiano Víctor V. Morris, propietario del Bar Morris



Para la preparación se requiere:

- 1 vaso de pisco
- $\frac{1}{2}$ vaso de jarabe de azúcar
- $\frac{1}{3}$ de vaso de jugo de limón (4 a 5 limones)
- 2 claras de huevo
- 1 taza de hielo en cubitos
- Amargo de angostura o bitter, o canela en polvo

16. De los ingredientes que se colocan en el vaso, el menor de ellos es:

17. Si una taza equivale a $1\frac{1}{2}$ vasos, ¿cuántos vasos suman los ingredientes? (sin considerar el huevo)



¡Tú puedes!

1. Simplificar:

$$\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{5}} + \frac{1}{1-\frac{1}{6}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1}{1-\frac{1}{8}}} \times \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{49} - \frac{62}{343} \right)$$

- a) 50 b) $\frac{1}{50}$ c) $\frac{1}{40}$ d) 40 e) 20

2. Simplificar:

$$E = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

- a) $n(n+1)$ b) $\frac{n+1}{2}$ c) n^2 d) $\frac{n(n+1)}{2}$ e) $\frac{1}{n}$

3. La expresión:

$$\sqrt{\frac{5}{36} + \frac{5}{48} - \frac{2}{75} + \frac{121}{3600}}$$

equivale a:

- a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{2}$

4. Se tiene dos números primos con los cuales se forma una fracción que sumada con su inversa da $\frac{218}{91}$. ¿Cuál es el denominador de la fracción mayor?

- a) 7 b) 13 c) 19 d) 23 e) 91

5. Si "a" y "b" son números naturales, hallar la suma de todos los valores posibles de "a" de modo que:

$$\frac{a}{9} + \frac{b}{5} = \frac{46}{15}$$

- a) 7 b) 21 c) 30 d) 15 e) 45



Practica en casa

1. Calcular: $\frac{7}{5} + \frac{8}{15} + \frac{7}{45}$

2. Calcular: $1\frac{1}{12} + 2\frac{2}{3} + 1\frac{1}{4}$

3. Calcular: $5\frac{7}{12} - 3\frac{1}{4}$

4. Calcular: $4\frac{2}{3} + 3\frac{3}{5} - 2\frac{4}{15}$

5. Calcular: $5\frac{2}{3} \times \frac{11}{34} \times \frac{1}{110} \times 60$

6. Calcular: $\frac{17}{36} \times \frac{18}{39} \times 2\frac{3}{5} \times \frac{2}{17} \times 45$

7. Calcular: $6\frac{3}{5} \div 3\frac{3}{10}$

8. Calcular: $\frac{3}{5} \times \frac{16}{9} \times \frac{3}{4} \div 3\frac{1}{3}$

9. Calcular: $\frac{\frac{1}{5} \div 4}{2 - \frac{3}{5}}$

10. El numerador de la fracción irreducible equivalente a:

$$\frac{\frac{1}{3} \div 6}{1 - \frac{5}{3} \times \frac{1}{4}} \text{ es:}$$

11. Reducir: $\sqrt{1 + \left(\frac{5}{12}\right)^2}$

12. Simplificar: $\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}{\frac{2}{3} - \frac{3}{10}} \times \frac{33}{8}$

13. Reducir: $\sqrt{4\frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{3}{7}\right) \times \left(2 - \frac{4}{9}\right)}$

14. Al simplificar el producto:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{1}{6}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

se obtiene:

15. Simplificar:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$$

Aplicación de fracciones (Parte I)

En este capítulo aprenderemos:

- A reconocer gráficamente las fracciones como parte de un total
- A utilizar las fracciones para expresar una parte del total
- A utilizar las operaciones básicas para relacionar las partes de un total

El hombre que calculaba

Desde la ciudad de “Samarra”, a orillas del Tigris, van a camello el calculista Beremiz Samir y su joven amigo bagdalí camino de Bagdad. Al llegar a un oasis asisten a la discusión de tres hermanos Mustafá, Hamet y Harim, sobre el reparto de una herencia. Enablándose el siguiente diálogo:

BEREMIZ:

Buenos hombres, ¿porqué discuten?

MUSTAFÁ:

Nuestro padre nos ha dejado en herencia 35 camellos y la siguiente condición de reparto, para mí, que soy el mayor será la mitad, para mi hermano mediano, Hamet, la tercera parte y para Harim, el pequeño, solo la novena parte.

¡En nombre de Allah, los tres aceptamos la venerable voluntad de nuestro padre!

El problema es que no nos sale bien el reparto, pues, a mí me corresponden más de 17 camellos, pero menos de 18. A Hamet, más de 11 pero menos de 12 y para Harim más de 3 pero menos de 4.”

BEREMIZ:

¡Allah sea loado! Os daré la solución, joven bagdalí, amigo mío, préstame tu camello.

Él no se lo quería dejar, pero finalmente acepto y uniéndolo a los 35 dijo así:

BEREMIZ:

“Voy a hacer la división justa y exacta de los camellos que como veis, ahora son 36”

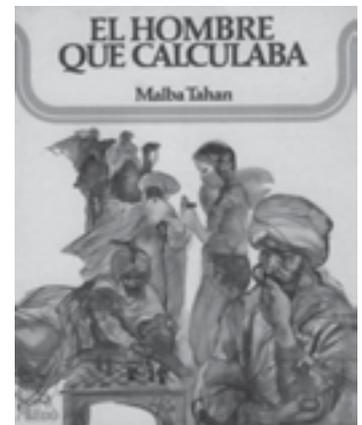
Tú, Mustafá, recibirás la mitad de 36 camellos, es decir 18. Para Hamet será la tercera parte de 36, que es justo 12. Tú, pequeño Harim, recibirás la novena parte de 36, es decir 4 camellos. Todos habéis ganado con mi reparto.

“ $18 + 12 + 4 = 34$, de los 36 camellos sobran 2. Uno, como sabéis es para mi joven amigo el bagdalí, que nos lo prestó para hacer el reparto. El otro que sobra es justo que me corresponda por haber resuelto ventajosamente para vosotros, el complicado problema de la herencia.

MUSTAFÁ:

“Eres inteligente, extranjero, aceptamos tu reparto hecho con justicia y equidad. Toma el camello que quieras”.

- ¿Por qué le sobran esos dos camellos?





Saberes previos

Completa con números:

		$3 \times 3 + 4 \times 4$	Un cuadrado perfecto			Una centena	
			Un cubo perfecto			MCD de 36 y 48	
Cuadrado de 7				11 al cuadrado			
Cubo de 6				3 a la cuarta			
	$5 + 2 \times 7$			$20^2 + 20$			
	$3 + 7^2$			CLIV			
		$(5 - 2)^4$			Número capicúa		
		MCM de 3 y 17			MCM de 9; 12 y 4		
		Una docena	Cubo de 8				Media docena
			Cuadrado de 20				Cubo de 7
Múltiplo de 7					Neutro de la multiplicación		
Dos docenas	Docena de docenas				$2^2 + 3^2$		
	MCD de 4; 6; 8 y 10			$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$		Números consecutivos	
	Media docena			Primer primo no par		Cuadrado perfecto	
		Dos decenas					
		Neutro			Múltiplo de 9		



Conceptos básicos

Parte todo

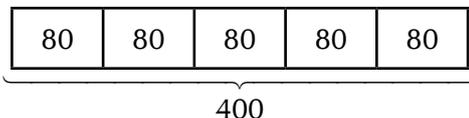
Cuando una cantidad es dividida, el objeto es determinar el valor de cada una de ellas.

Fracción de una cantidad

➔ Ejemplo:

- Calcular los $\frac{2}{5}$ de 400 soles.

400 se divide en cinco partes, cada una de ellas será 80, luego se toman dos de ellas

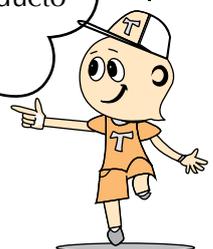


Entonces: $\frac{2}{5} \times 400 = 2 \times 80 = 160$

• Calcular los $\frac{7}{15}$ de los $\frac{3}{4}$ de 600.

De, del, de los, implica producto

$$\frac{7}{15} \times \frac{3}{4} \times 600 = 210$$



¿Qué parte o fracción de “a” es “b”?

➔ Ejemplos:

- ¿Qué parte de 40 es 25?

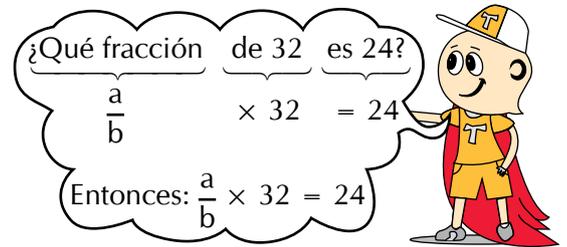
Se divide en 40 partes y se tomarán 25.

$$\frac{1}{40} \times 25 = \frac{25}{40} \text{ simplificando } \frac{5}{8}$$

- ¿Qué fracción es 18 de 45?

“De 45” implica que se debe dividir en 45 partes para luego tomar 18 de ellas

$$\frac{1}{45} \times 18 = \frac{18}{45} \text{ simplificando } \frac{2}{5}$$



- Si en una reunión hay 12 mujeres y 18 varones, ¿qué fracción de la reunión son las mujeres?

¿Qué fracción de (12 + 18) son las 12 mujeres?

$$\underbrace{\text{¿Qué fracción}}_{\frac{a}{b}} \quad \underbrace{\text{de 30}}_{\times 30} \quad \underbrace{\text{es 12?}}_{= 12}$$

Entonces: $\frac{a}{b} = \frac{12}{30}$ simplificando: $\frac{2}{5}$

Fracción de lo que queda

➔ Ejemplos:

- De 300 soles que tenía gasté 180 y luego perdí $\frac{2}{3}$ de lo que quedaba. ¿Cuánto me queda al final?

Gasté 180, entonces queda: $300 - 180 = 120$

Luego perdí $\frac{2}{3}$ de $120 = 80$

Finalmente quedará: $120 - 80 = 40$ soles

- Se compró 500 huevos, en el trayecto se rompieron los $\frac{2}{5}$ y luego se vendió los $\frac{5}{6}$ del resto.

¿Cuántos huevos quedan?

Se rompieron $\frac{2}{5}$ de $500 = 200 \rightarrow$ Quedan: $500 - 200 = 300$

Se venden: $\frac{5}{6}$ de $300 = 250 \rightarrow$ Están quedando: $300 - 250 = 50$ huevos

Fracción como operador

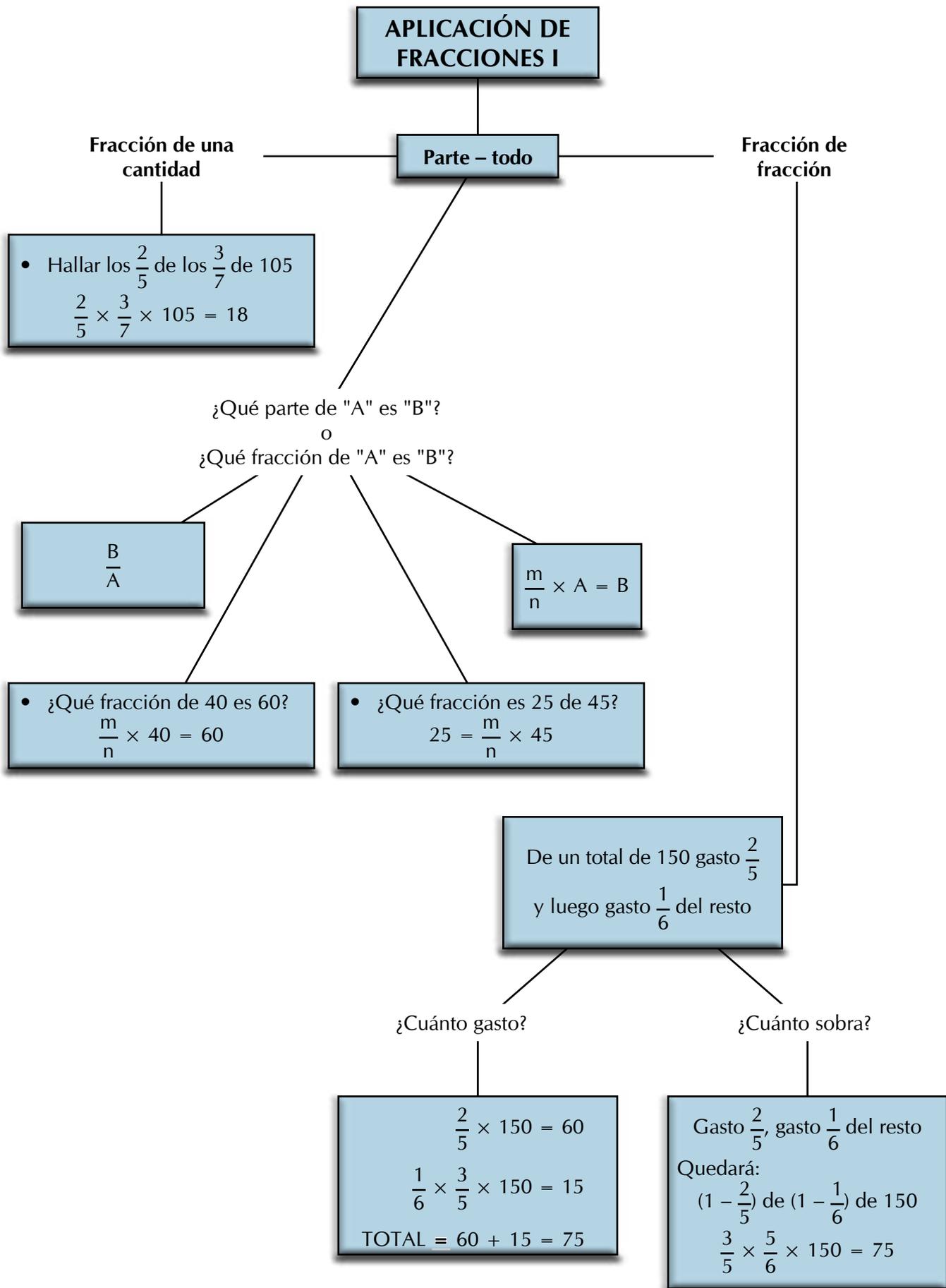
El $\frac{a}{b}$ de “N”: $\frac{a}{b} \cdot N$

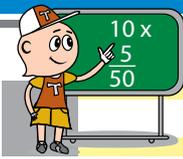
➔ Ejemplos:

- Los $\frac{2}{3}$ de 15: $\frac{2}{3} \cdot 15 = 10$

- Los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{8}{9}$ de 12: $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot 12 = 8$

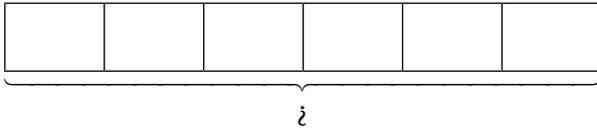
Síntesis teórica





Aplica lo comprendido

1. Cierta número se divide en 6 partes. Si la sexta parte vale 25, completa:



Entonces:

- Los cuatro sextos es:
- El número es:

2. Completa:

- $\frac{1}{6} \times \dots = 5$
- $\frac{2}{5} \times \dots = 12$

3. Completa:

- ¿Qué parte es 12 de 60?
- ¿Qué parte es 24 de 60?

4. Determina los $\frac{2}{5}$ de los $\frac{3}{7}$ de 210.



Aprende más

1. a) ¿Qué parte es $\frac{2}{3}$ de $\frac{7}{8}$?
b) ¿Qué parte de $\frac{9}{8}$ es $\frac{3}{4}$?
2. a) ¿Los $\frac{2}{5}$ de qué número es 18?
b) ¿De qué número, 15 representa los $\frac{3}{7}$?
3. Tenía S/. 80, perdí S/. 20. ¿Qué parte de lo que no perdí es lo que perdí?
4. Si Alex tenía S/. 60 y en la compra de unos helados gastó S/. 18, ¿qué parte de su dinero gastó? ¿Qué parte de lo que gastó es lo que no gastó?
5. En el salón del segundo año del colegio Trilce, hay 24 varones y 12 mujeres. ¿Qué parte del salón son varones? ¿Qué parte de los varones son mujeres?
6. Si ya han transcurrido los $\frac{5}{6}$ de un día, ¿qué hora es en ese momento?
7. De los S/. 25 que recibí de propina, gasté S/. 10. ¿Qué parte de lo que no gasté es lo que gasté?
8. José compró medio litro de yogur y en el desayuno consumió 300 cm^3 . ¿Qué parte de lo que no consumió es lo que consumió?

9. Tenía S/. 90, perdí los $\frac{3}{5}$ y presté $\frac{5}{6}$ del resto. ¿Cuánto me queda?
10. Una pecera con sus peces ha costado 48 soles. Sabiendo que el precio de la pecera es los $\frac{5}{11}$ del precio de los peces, hallar el precio de la pecera.
11. Alex recibió S/. 84 de propina y gastó $\frac{3}{4}$ de lo que no gastó. ¿Cuánto gastó?
12. Un cilindro contiene aceite hasta un tercio de su capacidad. Si se añade 15 litros, el cilindro estará lleno hasta la mitad. ¿Cuántos litros de capacidad tiene el cilindro?
13. Un atleta, después de recorrer los $\frac{2}{7}$ de una pista, recorre los $\frac{3}{5}$ del resto. ¿Cuál es la longitud de la pista, si todavía le faltan recorrer 280 m?
14. Una persona tiene S/. 120 y gasta los $\frac{5}{8}$ y luego pierde $\frac{7}{9}$ de lo que le queda. ¿Cuánto tiene al final?
15. a) Aumentar 250 en sus $\frac{3}{5}$.
b) Disminuir 360 en sus $\frac{5}{9}$.

Aplicación cotidiana

Gas de Camisea



Camisea es actualmente el principal yacimiento de gas natural en el Perú. Fue descubierto en la zona del mismo nombre, en Cusco, entre 1983 y 1987. Su operación comercial se inició en agosto de 2004, con la llegada del gas natural a Lima y Callao. Los estudios realizados en Camisea, en febrero de 2009, demuestran que sus reservas de gas natural ascienden a 8 000 TCF. El siguiente cuadro muestra las reservas de gas natural de los Lotes 88 y 56. Los contratos de la venta del gas se distribuyen en este orden:

- La 1/50 de la producción para las industrias
- La 1/7 del resto para las plantas eléctricas
- Los 9/40 del resto para la distribución en Lima y Callao.
- El resto a la petroquímica

16. ¿Cuánto se utiliza en las industrias?
17. ¿Cuánto utilizan las plantas eléctricas?



¡Tú puedes!

1. Se deja caer una pelotita de jebe de cierta altura de modo que después de cada rebote pierde $\frac{1}{3}$ de la altura que cae. Si después del quinto rebote se eleva hasta 64 cm, ¿de qué altura se dejó caer?
 - a) 320 m b) 486 c) 360 d) 385 e) 490
2. Un frutero debía vender 300 manzanas a razón de 5 por un sol y otras 300 manzanas a 3 por un sol. Si las mezcla y vende todas a 4 por un sol, ¿ganó o perdió? ¿Cuánto?
 - a) gana S/. 10 b) gana S/. 20 c) pierde S/. 10 d) pierde S/. 20 e) no gana ni pierde
3. Se divide un tubo en cuatro partes diferentes, la primera es un tercio de la longitud total del tubo, la segunda parte es un cuarto del tubo y la tercera parte es $\frac{2}{7}$ de la longitud del tubo. Si la cuarta parte mide $1\frac{1}{2}$ m, entonces la longitud del tubo es:
 - a) 14 m b) 28 c) 42 d) 56 e) 60
4. Luis distribuye su dinero de la siguiente forma: $\frac{2}{5}$ de su dinero en comida, $\frac{1}{8}$ en transporte, 200 soles en ropa, $\frac{1}{4}$ en tragos y 700 soles en discos. Determinar la diferencia entre lo que gasta en comida y transporte.
 - a) S/. 900 b) 1 000 c) 1 100 d) 1 200 e) 1 300
5. A un tubo se le hacen tres cortes y cada parte es la mitad más que la anterior. Si el tubo mide 65 cm, hallar la medida de la menor parte.
 - a) 4 cm b) 6 c) 8 d) 12 e) 10



Practica en casa

1. a) ¿Los $\frac{3}{7}$ de que número es 18?
b) ¿Los $\frac{4}{9}$ de qué número es 20?
2. a) ¿Qué parte es $\frac{15}{16}$ de $1\frac{2}{3}$?
b) ¿Qué parte de $\frac{4}{5}$ es $\frac{8}{15}$?
3. Carolina tenía S/. 90 y en la compra de unos regalos gastó S/. 18. ¿Qué parte de su dinero gastó? ¿Qué parte de lo que gastó es lo que no gastó?
4. En el salón del segundo año del colegio Trilce, hay 33 varones y 24 mujeres. ¿Qué parte del salón son varones? ¿Qué parte de los varones son las mujeres?
5. Los $\frac{12}{65}$ de un lote de tela vale S/. 480. ¿Cuánto vale los $\frac{3}{13}$ de la tela?
6. Si ya han transcurrido los $\frac{3}{8}$ de un día, ¿qué hora es en ese momento?
7. Del dinero que llevaba Alex, gastó $\frac{2}{7}$ en la compra de una pelota. ¿Cuánto dinero tenía, si le sobra 15 soles?
8. De los 15 soles que recibí de propina, gasté 9 soles. ¿Qué parte de lo que no gasté es lo que gasté?
9. Carolina, de un litro de leche que tenía, en el desayuno consumió 250 cm^3 de leche. ¿Qué parte de lo que no consumió es lo que consumió?
10. Tenía S/. 120, perdí los $\frac{3}{5}$ y presté $\frac{5}{6}$ del resto. ¿Cuánto me queda?
11. El precio de una gaseosa es de S/. 3, de los cuales el valor del envase es S/. 1. ¿Qué fracción del costo de la gaseosa es el del líquido?
12. Una pecera con sus peces ha costado 60 soles. Sabiendo que el precio de la pecera es los $\frac{7}{13}$ del precio de los peces, hallar el precio de la pecera.
13. Alex recibió S/. 78 de propina y gastó $\frac{5}{8}$ de lo que no gastó. ¿Cuánto gastó?
14. Un cilindro contiene aceite hasta un tercio de su capacidad. Si se añade 12 litros, el cilindro estará lleno hasta la mitad. ¿Cuántos litros de capacidad tiene el cilindro?
15. Un atleta, después de recorrer los $\frac{3}{7}$ de una pista, recorre los $\frac{2}{5}$ del resto. ¿Cuál es la longitud de la pista, si todavía le faltan recorrer 240 m?

Aplicación de fracciones (Parte II)

En este capítulo aprenderemos:

- A utilizar las fracciones para expresar las cantidades por unidad de tiempo.
- A utilizar las operaciones básicas para determinar las partes de un total.

Análisis nutricional

Varias marcas de gaseosas ocultaban su composición "secreto de marca". Esto motivó que ASPEC las denunciara, logrando así que consignen en sus envases las sustancias usadas en su fabricación. Algunos de estos ingredientes son agua carbonatada, azúcar, color caramelo, acidulante, saborizantes naturales, saborizantes, cafeína y colorante Tartrazina. De ello se ha hecho un análisis nutricional de la Inca Kola y Coca Cola.

Análisis Nutricional	Peso Total (g)	Calorías (cal)	Proteínas (g)	Sodio (g)
Bebidas				
Coca Cola Regular	360	150	0	20
Coca Cola Mediana	480	200	0	25
Coca Cola Light Regular	360	1	0	54
Coca Cola Light Mediana	480	4/3	0	72
Inca Kola Regular	360	144	0	36
Inca Kola Mediana	480	192	0	48

Como puede observar en cada tipo de bebida la relación (división) de peso total y cantidad de calorías se mantiene.

- ¿Qué cantidad de calorías consumes al ingerir Inca Kola en un vaso?

(Un vaso contiene aproximadamente $\frac{1}{5}$ de la botella regular)

Sabías que...



... en el 37% de los estadounidenses el mecanismo de la sed es tan débil que frecuentemente lo confunden con hambre?

... la falta de agua es la causa N° 1 de la fatiga diurna?

... según estudios de la Universidad de Washington, un vaso de agua calma el hambre en casi un 100% de los casos bajo dieta adelgazante?

Saberes previos

Complete con números:

Una centena	↓		↓	Los $\frac{4}{5}$ de 25		
Los $\frac{3}{4}$ de 16	→			Cubo de 7		$8 - 1 \times 2$
						Cubo de 2
						Cuadrado de 8 menos 1
Medio millar						La mitad de 980
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$						Raíz cuadrada de 64
				Cuadrado perfecto		
				Los $\frac{5}{8}$ de 56		Vigésimo
El numerador de $\frac{1}{5} + \frac{1}{9}$						Numerador de $2 + \frac{2}{5}$
MCD de 12; 18 y 24						$\frac{3}{4}$ de ... es 9
		El MCM de 6; 8 y 12				Decena y media
		Múltiplo de 9				Docena y media

Conceptos básicos

Reducción a la unidad

El punto de partida es determinar el trabajo o volumen por unidad de tiempo (cada día, cada año, cada hora, cada minuto), ello permitirá determinar el trabajo o volumen total.

El total es conocido

➔ Ejemplos:

- Un tanque de 300 m³ es llenado por los caños "A" y "B" en 30 y 20 horas respectivamente. ¿En qué tiempo se llenará el tanque con los dos caños a la vez?

Calculemos cuánto llena cada uno en una hora

Caño	Horas	Cada hora
A	30	$\frac{300}{30} = 10 \text{ m}^3/\text{h}$
B	20	$\frac{300}{20} = 15 \text{ m}^3/\text{h}$

Juntos "A" y "B" llenarán 25 m³/h, entonces los 300 m³ lo llenarán en:

$$\frac{300}{25} = 12 \text{ horas}$$



- Para fabricar 1 200 envases, una máquina antigua se demora media hora. La fábrica compra otra máquina que hace los 1 200 envases en 20 minutos. Si la fábrica decide utilizar las dos máquinas, ¿en qué tiempo terminarán los 1 200 envases?

Calculemos la producción de las máquinas cada minuto

Máquina	Cada minuto
Antigua	$\frac{1\ 200}{30} = 40$ envases/min
Nueva	$\frac{1\ 200}{20} = 60$ envases/min

Juntas cada minuto harán 100 envases, entonces: $\frac{1\ 200}{100} = 12$ minutos

Considerando al total como la unidad

➔ Ejemplos:

- Para llenar una piscina hay dos caños, uno lo llena en 12 horas y el otro en 20 horas. ¿En cuánto tiempo la llenarán los dos juntos?

Si el volumen de la piscina es 1, hallemos lo que cada caño llena por hora (la reducción a la unidad)

Caño	Horas	Cada hora
A	12	$\frac{1}{12}$
B	20	$\frac{1}{20}$

Las dos juntas cada hora: $\frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{5 + 3}{60}$

Simplificando: $\frac{2}{15}$

Para llenar la piscina (1) se demorarán: $\frac{1}{\frac{2}{15}} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2} = 7$ horas 30 minutos



- Para llenar una piscina hay dos caños y un desagüe, uno lo llena en 10 horas y el otro en 6 horas y el desagüe la vacía en 15 horas. ¿En cuánto tiempo se llenarán si se abren las tres a la vez?

Si el volumen de la piscina es 1, hallemos lo que cada caño llena por hora (la reducción a la unidad)

Caño	Horas	Cada hora
A	10	$\frac{1}{10}$
B	6	$\frac{1}{6}$
Desagüe	15	$\frac{1}{15}$

Los tres juntos cada hora: $\frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{1}{15} = \frac{6 + 10 - 4}{60}$

Simplificando: $\frac{1}{5}$

Para llenar la piscina (1) se demorarán: $\frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$ horas

Método práctico
Sean dos caños (llenan en "a" y "b" horas) y un desagüe (vacía en "c" horas).
Juntos llenan en: $\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}}$ horas



Mezclas

En una mezcla homogénea no se percibe los componentes (sal en agua, azúcar en agua, etc.). Es importante determinar la fracción que representa cada componente.

➔ **Ejemplo:**

- En 300 cm³ de agua se disuelven 30 g de azúcar. Si se toma 120 cm³, ¿cuánto de azúcar se está tomando?

La fracción de azúcar en los 300 cm³ de agua, en los 120 cm³ que se toman y en los 180 cm³ que queda, es la misma.

¿Qué fracción es 30 (azúcar) de 300 (agua)?

$$\frac{30}{300} = \frac{1}{10}$$

Con esta fracción:

La cantidad de azúcar que se tomó: $\frac{1}{10}$ de 120 = 12 g

La cantidad de azúcar que quedó: $\frac{1}{10}$ de 180 = 18 g

Si son mezclas de la misma calidad, la fracción de cada componente es constante





Síntesis teórica

APLICACIÓN DE FRACCIONES II

Reducción a la unidad

Mezclas

Determinar el trabajo (volumen) en cada unidad de tiempo (minutos, horas)

La concentración (fracción) de los componentes de una misma mezcla es constante

Dos caños llenan un tanque:
"A" lo llena en 6 horas
"B" lo llena en 12 horas

- ¿Cuánto llenan cada hora?
"A": $\frac{1}{6}$ del tanque
"B": $\frac{1}{12}$ del tanque

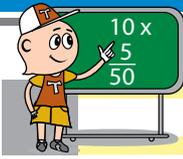
- ¿En qué tiempo llenan juntos el tanque?
Cada hora llenan: $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$
Lo llenarán en 4 horas

- ¿Qué fracción es colorante?
Total = 20 + 30 + 10 = 60 mL
Colorante = 10 mL
El colorante es $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ de la mezcla

Se mezcló 20 mL de agua con 30 mL de alcohol y 10 mL de colorante

- Se toma 18 mL de la mezcla, ¿cuánto colorante hay?
 $\frac{1}{6}$ de lo que se tomó (18 mL)
Cantidad de colorante: $\frac{1}{6} \times 18 \text{ mL} = 3 \text{ mL}$

- Si se toma 18 mL de la mezcla, ¿cuánto colorante sobra?
 $\frac{1}{6}$ de lo que queda (60 - 18 = 42 mL)
Cantidad de colorante que sobra: $\frac{1}{6} \times 42 = 7 \text{ mL}$



Aplica lo comprendido

- La capacidad de una piscina es de $1\ 200\text{ m}^3$ y la llave "A" la llena en 12 horas, mientras que la llave "B" lo hace en 20 horas.
 - ¿Cuánto llena en cada hora la llave "A"?
 - ¿Cuánto llena en cada hora la llave "B"?
 - ¿Cuánto llenan las dos juntas en cada hora?
- Para llenar una piscina de 360 m^3 se tiene dos llaves, "A" que llena 12 m^3 cada hora y "B" que llena 20 m^3 cada hora, entonces:
 - ¿En qué tiempo lo llenará la llave "A"?
 - ¿En qué tiempo lo llenará la llave "B"?
- Una taza con 60 mL de café contiene 20 g de azúcar y 6 g de cafeína, entonces:
 - La relación de azúcar y café es:
 - La relación de cafeína y café es:
- Se ha mezclado 2 litros de agua con 10 litros de alcohol, entonces:
 - ¿Cuántos litros hay en total?
 - ¿Qué parte es el alcohol?
- Si 1 000 mL de aceite para carro lleva 36 mL de un aditivo, entonces:
 - ¿Qué parte del aceite es el aditivo?
 - ¿Qué parte del aceite no es el aditivo?



Aprende más

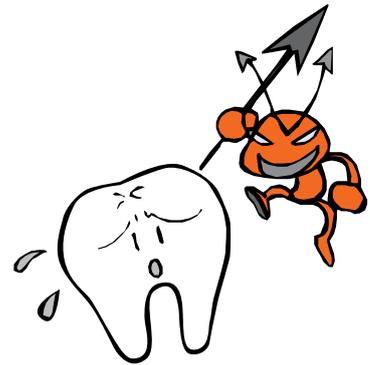
- Alex demora cuatro horas en hacer su tarea. ¿Qué parte de su tarea hace en una hora?
- En un minuto un caño llenó $1/36$ de un depósito. ¿En qué tiempo llenará todo el depósito?
- Alex hace los $3/5$ de una obra en 6 días. ¿Qué parte de la obra hizo en un día?
- Pedro hace una obra en 20 días y Max lo hace en 30 días. ¿Cuánto tiempo demorarán en hacerla los dos?
- Una llave llena un reservorio en 6 horas y otro lo vacía en 10 horas. ¿En qué tiempo se llenará dicho reservorio, si se abren las dos llaves simultáneamente?
- Se ha mezclado 40 mL de alcohol con 20 mL de agua. De los 60 mL formados solo se utilizó 39 mL, ¿cuánto de alcohol se usó?
- En una jarra se quiso preparar 600 mL de sangría y para eso se mezcla vino con 150 mL de gaseosa. Si Pedro toma 200 mL de sangría, ¿cuánto de vino está tomando?
- Para formar una aleación de oro y plata, se utiliza 20 g de oro con 100 g de plata. Pero al momento de fundirse se pierden 30 g. ¿Cuántos gramos de oro hay en la aleación final?
- Dos obreros necesitan 12 horas para hacer un trabajo. Si uno, trabajando solo, lo hace en 20 horas, ¿cuánto tiempo empleará el segundo?
- Tres obreros hacen un trabajo en 4 días. Sabiendo que el primero lo haría solo en 9 días y el segundo en 12 días, averiguar lo que demora el tercero trabajando solo.
- Un grifo puede llenar un tanque en 6 horas y un desagüe lo vacía en 8 horas. Si ambos se abren a la vez, ¿en qué tiempo se llenará el tanque?
- "A" puede hacer una obra en 20 días y "B" la podría hacer en 60 días. Si "A" y "B" trabajan juntos, ¿en cuántos días podrán terminar?
- Para hacer un buen café con leche se deben mezclar 12 partes de agua con 1 de café y 2 de leche. Para formar 450 mL de café con leche, ¿cuánto de café se requiere?
- Una taza con 300 mL de café, contiene disuelto 20 g de azúcar. Si en cada sorbo se toma 30 mL, ¿qué cantidad de azúcar se toma en dos sorbos?
- Rosa dedica $1/6$ del día a jugar, $1/18$ del día a comer, $1/4$ del día a dormir y el resto del día lo dedica al colegio y las tareas. ¿Qué fracción del día dedica a estas dos últimas labores?

Aplicación cotidiana

¿Qué es una amalgama dental?

Es una aleación de mercurio con otro metal. Las que se emplean en Odontología para empastar dientes y muelas (de color gris metálico). Para elaborar 100 partes de amalgama se requiere: mercurio líquido (50 partes), plata (35 partes), estaño (12 partes), cobre (2 partes) y una pequeñísima cantidad de zinc. Algunos miembros de la comunidad científica plantearon su inocuidad, pues demostraron que en 5 años un 30% del mercurio se ha evaporado de la amalgama y probablemente absorbido por el paciente. Entonces para formar 60 g de amalgama:

16. ¿Qué cantidad de mercurio líquido se requiere?
17. ¿Qué cantidad de plata se utilizará?



¡Tú puedes!

- "A" y "B" pueden hacer una obra en 3 días, "B" y "C" en 4 días y "A" y "C" en 5 días. ¿En cuánto tiempo puede hacerla "A" trabajando solo?
a) $8\frac{1}{8}$ días b) $7\frac{1}{17}$ c) 10 d) 7 e) 15
- Un hombre y un muchacho hacen un trabajo en 16 días y cinco hombres y seis muchachos hacen el mismo trabajo en 3 días. Hallar el tiempo que se demora en hacer un hombre solo el trabajo.
a) 18 días b) 24 c) 25 d) 26 e) 32
- "A" y "B" pueden hacer un trabajo en 18 horas y "B" puede hacer dicho trabajo en 24 horas. Si "A" trabaja la primera mitad y "B" trabaja el resto, hallar en cuánto tiempo harán la obra.
a) 36 días b) 48 c) 60 d) 72 e) 96
- Si Juan puede hacer una obra en 12 días y Luis la puede hacer en 36 días, hallar en cuánto tiempo harán $\frac{2}{3}$ de la obra trabajando juntos.
a) 4 días b) 5 c) 6 d) 7 e) 8
- Un trabajador "A" puede hacer una obra en 9 días y ayudado por otro "B" la podría hacer en 8 días. ¿En cuánto tiempo haría la obra solo el trabajador "B"?
a) 8 días b) 16 c) 24 d) 48 e) 72



Practica en casa

- Dos grifos "A" y "B" llenan juntos un tanque en 30 horas. Si el grifo "A" se tardaría en llenar el tanque 60 horas, ¿cuánto tiempo se demorará "B" en llenar el tanque solo?
- Una persona hace los $\frac{4}{5}$ de una obra en 12 días, ¿en qué tiempo hará los $\frac{2}{3}$ de la obra?
- Dos llaves abiertas a la vez pueden llenar un estanque en 5 horas y una de ellas sola lo puede llenar en 8 horas. ¿En cuánto tiempo puede llenar el estanque la otra llave?
- Un estanque se puede llenar con tres llaves. La primera lo puede hacer en 5 horas, la segunda

en 10 horas y la tercera en 8 horas. ¿En cuánto tiempo se llenará el estanque, si estando vacío y cerrado el desagüe, se abren al mismo tiempo las tres llaves?

5. He gastado las tres cuartas partes de mi dinero y me quedan 900 euros. ¿Cuánto tenía? ¿Qué parte de lo que gastó, no gastó?
6. De un depósito de agua se saca $\frac{1}{3}$ del contenido y después $\frac{2}{5}$ de lo que quedaba. Si aún quedan 600 litros, ¿cuánta agua había al principio?
7. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se pueden llenar con un bidón de 30 litros?
8. Un vendedor despacha por la mañana las $\frac{3}{4}$ partes de las naranjas que tenía y por la tarde vende $\frac{4}{5}$ de las que le quedaban. Si al terminar el día aún le quedan 100 kg de naranjas, ¿cuántos kg tenía?
9. Aurora sale de casa con 3 000 euros. Se gasta $\frac{1}{3}$ en libros y después, $\frac{4}{5}$ de lo que le quedaba en ropa. ¿Con cuánto dinero vuelve a casa?
10. Pedro puede hacer una obra en 6 días y César en solo 3 días. Si lo hacen juntos, ¿cuántos días necesitan?
11. Pedro puede hacer un trabajo en 8 días y Juan en 12 días. ¿En cuántos días podrán hacer el trabajo los dos juntos?
12. Dos llaves abiertas a la vez pueden llenar un estanque en 8 horas y una de ellas sola lo puede llenar en 10 horas. ¿En cuánto tiempo puede llenar el estanque la otra llave?
13. Cuando se compra alcohol de 80° , los $\frac{4}{5}$ es alcohol puro. Si se compra 120 mL de alcohol de 80° , ¿qué cantidad de alcohol puro tiene?
14. En una jarra se quiere preparar 800 mL de sangría y para eso mezcla vino con 240 mL de gaseosa. Si Gloria toma 300 mL de sangría, ¿cuánto de vino está tomando?
15. Una taza de 500 mL de café, contiene disuelto 30 g de azúcar. Si en cada sorbo se toma 50 mL, ¿qué cantidad de azúcar se toma en 3 sorbos?

Complemento



Aprende más

1. ¿Cuántas fracciones son propias e irreducibles y tienen como denominador al 20?
2. Una fracción equivalente a $\frac{12}{15}$, tiene como suma de términos al 72. ¿Cuál es la suma de cifras del denominador?

3. Calcular los $\frac{2}{5}$ de los $\frac{3}{7}$ de 210 más los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{8}{7}$ de 224.

4. En el salón del segundo año del colegio Trilce, hay 28 varones y 12 mujeres. ¿Qué parte del salón son varones? ¿Qué parte de los varones son mujeres?

5. Simplificar:

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{4}{6}}{\frac{5}{5} - \frac{1}{7}} \div \frac{1}{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}$$

6. ¿Cuánto le falta a los $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$ para ser igual a los $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{7}$?

7. ¿Cuánto le sobra a $\frac{5}{7}$ de $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$ de 7 para ser igual a la mitad de los $\frac{4}{3}$ de $\frac{3}{5}$?

8. Un recipiente contiene 24 litros de alcohol y 3 litros de agua. Si se extrae 18 litros de la mezcla, ¿cuántos litros de alcohol quedan?

9. Zoila puede hacer una obra en 21 días, mientras que Charito tarda 28 días para hacer la misma obra. Si trabajan juntas, ¿cuántos días necesitan para hacer dicha obra?

10. Una tubería "A" puede llenar un tanque en 6 horas y otra tubería "B" de desagüe la puede vaciar en 8 horas. Estando vacío el tanque, se abren las dos llaves el lunes a las 09:00 de la mañana. ¿Cuándo se llenará?

11. Reducir:

$$2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$$

12. Simplificar:

$$\frac{9 \div \frac{1}{\frac{1}{3}} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{12}}{6 \div \frac{1}{\frac{1}{2}}}$$

13. Al perder los $\frac{3}{8}$ de mi dinero y luego la tercera parte del resto, me queda 75 soles. ¿Cuánto tenía?

14. Simplificar:

$$\frac{\frac{2 - \frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} + \frac{3 - \frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}}{\frac{4 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} + \frac{5 - \frac{1}{5}}{24}} \times \frac{7}{20} \times \frac{11}{2}$$

15. Los $\frac{3}{4}$ de un recipiente más 7 litros son de petróleo y $\frac{1}{3}$ del recipiente menos 20 litros son de agua. ¿Cuántos litros son de petróleo?



¡Tú puedes!



- Una pelota se deja caer desde una altura de 1 250 cm y luego de cada rebote se eleva $\frac{3}{5}$ de la altura de la cual cayó. Hallar a qué altura se elevará luego del cuarto rebote.
 - 81 cm
 - 162
 - 220
 - 260
 - 280
- ¿Cuántas fracciones propias e irreducibles, tienen como denominador a 1 000?
 - 400
 - 399
 - 401
 - 402
 - 404
- ¿Cuántas fracciones de la forma $\frac{\overline{ab}}{ba}$ son equivalentes a $\frac{4}{7}$?
 - 2
 - 3
 - 4
 - 5
 - 6
- Un padre, a su muerte deja repartida una herencia de la siguiente manera: el mayor hereda los $\frac{4}{10}$, el segundo los $\frac{7}{10}$ del primero, el tercero los $\frac{3}{10}$ del segundo, y el saldo que es de S/. 1 180 000 es para el mayordomo. ¿Cuánto fue la herencia total?
 - S/. 5 000 000
 - 6 000 000
 - 7 000 000
 - 4 000 000
 - 10 000 000
- Tres números son entre sí como 3; 8 y 15. Si la suma de la mitad del menor más un quinto del mayor es 54, ¿cuál es la cuarta parte del término intermedio?
 - 12
 - 18
 - 24
 - 30
 - 25



Practica en casa



- ¿Cuántas fracciones son propias e irreducibles y tienen como denominador al 30?
- Una fracción equivalente a $\frac{12}{15}$, tiene como suma de términos al 81. ¿Cuál es la suma de cifras del denominador?
- Calcular los $\frac{2}{5}$ de los $\frac{4}{11}$ de 110
- ¿Qué parte de 120 es 54?
- ¿Qué fracción es $\frac{5}{21}$ de $2\frac{1}{7}$?
- En el salón del segundo año del colegio Trilce, hay 38 varones y 12 mujeres. ¿Qué parte del salón son varones?
- Gasté los $\frac{3}{5}$ de mi dinero, luego los $\frac{3}{4}$ del resto y aún me quedan S/. 15. ¿Cuánto gasté?
- Un laboratorio comercializa perfume en frascos que tienen una capacidad de $\frac{2}{5}$ de litro. ¿Cuántos litros de perfume se han de fabricar para llenar 500 frascos?
- He gastado las tres cuartas partes de mi dinero y me quedan 900 euros. ¿Cuánto tenía?
- Con el contenido de un bidón de agua se han llenado 60 botellas de $\frac{3}{4}$ de litro. ¿Cuántos litros de agua había en el bidón?
- De un barril lleno de vino se saca la cuarta parte y después se saca $\frac{2}{3}$ de lo que queda. Si aún quedan 12 litros, ¿cuánto de vino había al inicio?
- Si cada botella mediana contiene $\frac{4}{5}$ litros de gaseosa, ¿cuántas botellas se necesitan para llenar un barril de 20 litros?
- Efectuar:

$$\frac{1 + \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} + \frac{2 - \frac{1}{2}}{3 - \frac{1}{2}}$$
- Resolver:
 - Aumentar 24 en sus $\frac{3}{8}$.
 - Disminuir 12 en sus $\frac{5}{6}$.

15. Efectuar:

$$\frac{\left(5\frac{7}{36} - 4\frac{1}{18} + 1\frac{1}{72}\right) \times 36}{78 - \frac{1}{2}}$$

16. Efectuar:

$$\frac{7\frac{12}{323} + 5\frac{18}{119} + 2\frac{23}{111}}{5\frac{23}{111} + 2\frac{12}{323} + 7\frac{18}{119}}$$

Expresiones decimales: Fracción generatriz

Conceptos básicos

Número decimal

Es la expresión lineal de una fracción ordinaria o decimal que se obtiene al dividir el numerador por el denominador.

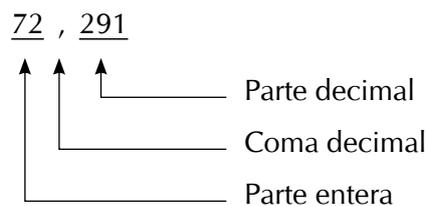
→ Ejemplos:

$$\frac{1}{5} = 0,2; \text{ que resulta de dividir: } 1 \div 5$$

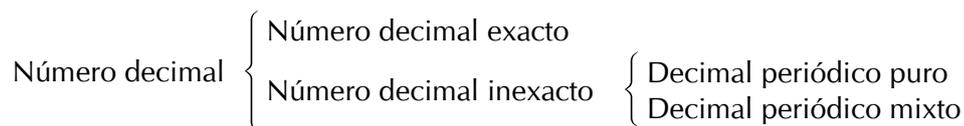
$$\frac{2}{3} = 0,666\dots; \text{ que resulta de dividir: } 2 \div 3$$

$$\frac{7}{15} = 0,4666\dots; \text{ que resulta de dividir: } 7 \div 15$$

Valor de posición de las cifras de un número decimal



Clasificación de los números decimales



Número decimal exacto

Dada la fracción irreducible:

$$f = \frac{a}{b} \quad \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right. \text{ primos entre sí}$$

La fracción "f" dará origen a un decimal exacto, cuando el denominador "b" tenga como divisores primos solo a 2 y/o 5.

→ Ejemplos:

- $\frac{1}{4} = 0,25$ porque $1 \div 4 = 0,25$
 $\underbrace{2}_{2 \textcircled{2}} \leftarrow \uparrow$
 2 cifras decimales exactas

- $\frac{7}{25} = 0,28$
 $\underbrace{5}_{5 \textcircled{2}} \leftarrow \uparrow$
 2 cifras decimales exactas

- $\frac{9}{40} = 0,225$
 $\underbrace{2}_{2 \textcircled{3}} \cdot 5^1 \leftarrow \uparrow$
 3 cifras decimales exactas

Número decimal inexacto

Le llamamos así, a aquél que tiene un número ilimitado de cifras decimales. Estos números decimales pueden ser, a su vez, de dos tipos:

Decimal periódico puro

Dada la fracción irreducible:

$$f = \frac{a}{b} \quad \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right. \text{ primos entre sí}$$

La fracción "f" dará origen a un decimal periódico puro, cuando el denominador "b" no tenga como divisores primos a 2 y/o 5.

➔ Ejemplos:

- $\frac{2}{3} = 0,6666\dots \Rightarrow$ periodo: 6
representación: $0,\widehat{6}$
- $\frac{5}{11} = 0,454545\dots = 0,\widehat{45}$
- $\frac{1}{9} = 0,1111\dots = 0,\widehat{1}$

Decimal periódico mixto

Dada la fracción irreducible:

$$f = \frac{a}{b} \quad \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right. \text{ primos entre sí}$$

La fracción "f" dará origen a un decimal periódico mixto, cuando el denominador "b" tenga como divisores primos a 2 y/o 5 y otros.

➔ Ejemplos:

- $\frac{5}{6} = 0,83333\dots \Rightarrow$ parte no periódica: 8
periodo: 3
representación: $0,8\widehat{3}$
- $\frac{17}{45} = 0,37777\dots = 0,3\widehat{7}$

Fracción generatriz

Todo número decimal tiene su equivalente en forma de fracción. La fracción que genera un decimal se llama fracción generatriz.

Generatriz de un número decimal exacto

Cuando el número decimal tiene la parte entera nula

➔ Ejemplo:

- Hallar la fracción generatriz de 0,24

En el numerador escribimos: $\rightarrow 24$

En el denominador escribimos 1 seguido de dos ceros (porque la parte decimal tiene 2 cifras):
 $\rightarrow 100$

Luego la fracción será: $\frac{24}{100}$

Como 24 y 100 no son primos entre sí, podemos simplificar la fracción:

$$\frac{24}{100} = \frac{3 \times 2 \times 2^2}{5^2 \times 2^2} = \frac{6}{25}$$

La fracción generatriz de 0,24 es $\frac{6}{25}$

Cuando el número decimal tiene la parte entera no nula, lo desdoblamos para, luego, efectuar una suma final, así:

➔ **Ejemplo:**

- Hallar la fracción generatriz de 4,25

Desdoblamos el número así: $4,25 = 4 + 0,25$

Escribimos la fracción generatriz de la parte decimal:

$$4,25 = 4 + \frac{25}{100}$$

Finalmente, volvemos a sumar, pero ahora como una suma de fracciones:

$$\Rightarrow 4,25 = 4 + \frac{1}{4} \Rightarrow 4,25 = \frac{17}{4}$$

La fracción generatriz de 4,25 es $\frac{17}{4}$.

Observación: otro método

$$4,25 = \frac{425}{100} = \frac{17 \times 5^2}{4 \times 5^2} = \frac{17}{4}$$



Generatriz de un número decimal periódico puro

- Hallar la fracción generatriz de $0,454545\dots$

En el numerador de la fracción escribimos el periodo, es decir 45.

En el denominador de la fracción, escribimos tantos nueves como cifras tenga el periodo. En este caso el periodo 45 tiene dos cifras, entonces en el denominador escribimos 99.

Luego la fracción será: $0,\overline{45} = \frac{45}{99}$

Simplificando:

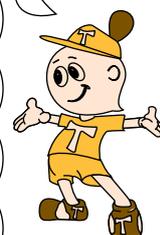
$$0,\overline{45} = \frac{5 \times 9}{11 \times 9} = \frac{5}{11}$$

La fracción generatriz de $0,4545\dots$ es $\frac{5}{11}$

Observación: Si un número decimal periódico puro tiene parte entera distinta de cero (Ejemplo: $2,\overline{45}\dots$) se puede hacer de dos formas:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad 2,\overline{45}\dots &= 2,\overline{45} \\ 2,\overline{45} &= 2 + 0,\overline{45} \\ &= 2 + \frac{45}{99} \\ &= 2 + \frac{5}{11} \\ 2,\overline{45} &= \frac{27}{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II.} \quad 2,\overline{45}\dots &= 2,\overline{45} \\ 2,\overline{45} &= \frac{245 - 2}{99} \\ &= \frac{243}{99} \\ 2,\overline{45} &= \frac{27 \times 9}{11 \times 9} \\ 2,\overline{45} &= \frac{27}{11} \end{aligned}$$



Generatriz de un número decimal periódico mixto

- Hallar la fracción generatriz de $0,24808080\dots = 0,24\overline{80}$

En el numerador de la fracción generatriz, escribimos la parte no periódica seguida de la parte periódica menos la parte no periódica:

$$2480 - 24$$

En el denominador de la fracción, escribimos tantos nueves como cifras tenga el periodo seguido de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica. Es decir:

$$9900$$

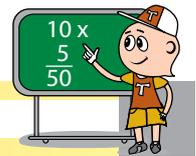
Entonces la fracción generatriz será:

$$0,24\overline{80} = \frac{2480 - 24}{9900} = \frac{2456}{9900}$$

Descomponiendo los términos y simplificando:

$$0,24\overline{80} = \frac{307 \times 2 \times 4}{9 \times 11 \times 5^2 \times 4} = \frac{614}{2475}$$

La fracción generatriz de $0,24\overline{80}$ es $\frac{614}{2475}$



Aplica lo comprendido

- Hallar la fracción generatriz de los siguientes números decimales:
 - $0,4 =$
 - $0,666... =$
 - $0,6333... =$
 - $0,7\overline{2} =$
 - $1,1\overline{3} =$
 - $0,03\overline{6} =$
- Hallar el valor de "x" si: $0,x = \frac{4}{5}$
- Hallar el valor de "a + b", si: $0,\overline{ab} = \frac{3}{11}$
- Hallar el valor de "p . q", si: $0,\overline{pq} = \frac{75}{100}$
- Hallar el valor de "m + n", si: $0,\overline{m\overline{n}} = \frac{15}{90}$



Aprende más

- Hallar la fracción generatriz de 0,018
- Hallar la fracción generatriz de 1,186
- Hallar la fracción generatriz de 0,33...
- Hallar la fracción generatriz de $2,0\overline{09}$
- Hallar la fracción generatriz de $0,1\overline{23}$
- Hallar la fracción generatriz de 5,018018...
- Hallar la fracción generatriz de $0,3\overline{5}$
- Hallar la fracción generatriz de $0,23\overline{6}$
- Hallar la fracción generatriz de $1,7\overline{6}$
- Hallar la fracción generatriz de 2,014545...
- Efectuar: $F = \frac{0,4 + 0,5}{0,3}$
- Simplificar: $E = (0,1) \cdot (0,1\overline{2}) \cdot 900$
- Simplificar: $\sqrt{\frac{\sqrt{144} \cdot 0,4 - 0,3}{2,5 - 0,1}} \times 3$
- Simplifique la siguiente expresión:

$$F = \frac{1,\overline{2} + 2,\overline{3} + 3,\overline{4} + \dots + 7,\overline{8}}{0,\overline{2} + 0,\overline{3} + 0,\overline{4} + \dots + 0,\overline{8}}$$
- Calcule el valor de:

$$F = \frac{0,2\overline{3} + 0,3\overline{4} + 0,4\overline{5} + 0,5\overline{6} + 0,6\overline{7}}{0,\overline{2} + 0,\overline{3} + 0,\overline{4} + 0,\overline{5} + 0,\overline{6}}$$



¡Tú puedes!



- Calcular "x", si: $\overline{1x} = 0,\overline{xx2}$
 a) 3 b) 4 c) 5 d) 7 e) 8
- Al convertir la fracción propia $\frac{\overline{nn}}{37}$ a decimal, se observa que la cifra de los milésimos es igual a 4. Hallar la suma de cifras que conforman el período.
 a) 18 b) 16 c) 19 d) 20 e) 17
- ¿En cuánto excede la fracción decimal periódica pura 0,777... a la fracción decimal periódica mixta 0,6111...?
 a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{2}{5}$
- Si: $0,\overline{1a} = \frac{m}{11}$, hallar: $m^2 + a^2$
 a) 60 b) 64 c) 66 d) 68 e) 62
- Calcular el valor de "A", en: $A = 5,2 + 0,031 + 0,00031 + 0,0000031 + \dots$
 a) $\frac{5238}{900}$ b) $\frac{3231}{990}$ c) $\frac{5179}{990}$ d) $\frac{31315}{900}$ e) $\frac{4321}{900}$



Practica en casa



- Hallar la fracción generatriz de 0,185
- Hallar la fracción generatriz de 0,0036
- Hallar la fracción generatriz de 3,05
- Hallar la fracción generatriz de 0,144144144...
- Hallar la fracción generatriz de $6,\overline{018}$
- Hallar la fracción generatriz de $8,\overline{0321}$
- Hallar la fracción generatriz de $0,\overline{0863}$
- Hallar la fracción generatriz de $6,\overline{8916}$
- Hallar la fracción generatriz de 14,666...
- Hallar la fracción generatriz de $9,\overline{0036}$
- Calcule el valor de "a", si se cumple que:

$$\overline{a,8a} = \frac{9}{2} - \frac{2}{3}$$
- Calcule: $\sqrt{0,694}$
- Hallar el triple de "C", si:

$$C = \sqrt{0,\overline{3} + 0,\overline{4} + 0,\overline{5} + 0,\overline{6} + \frac{7}{9}}$$
- Hallar "m + n", si se sabe que: $0,\overline{2n} = \frac{m}{11}$
- Si: $0,\overline{ab} = \frac{b}{11}$, hallar "a + b".

Multiplicamos los signos y los números sin las comas decimales. $(-253)(34) = -8602$

En el resultado separamos tres decimales ($2 + 1$) a partir de la derecha. $(-2,53)(3,4) = -8,602$

- Para multiplicar potencias de base decimal, operamos como si se tratara de potencias de números enteros, considerando que el resultado tiene una cantidad de cifras de la parte decimal igual al producto de multiplicar el exponente por la cantidad de cifras de la parte decimal de la base.

➔ **Ejemplo:**

Si efectuamos: $(-2,53)^3$ tenemos:

Exponente: 3

Cantidad de cifras de la parte decimal: 2

Entonces: Cantidad de cifras de la parte decimal en el resultado: 3×2 es decir, 6

Luego operamos sin la coma decimal: $(-253)^3 = (-253)(-253)(-253) = -16194277$

A partir de la derecha, separamos seis cifras que conformarán la parte decimal

Finalmente: $(-2,53)^3 = -16,194277$

División de números decimales

- Para esto, multiplicamos el dividendo y el divisor por la unidad seguida de tantos ceros como sea posible, para transformar los números decimales en enteros.

➔ **Ejemplo:**

- Efectuar: $13,5 \div 7$

Multiplicamos ambos términos por 10 $\Rightarrow 135 \div 70$ (división de enteros)

$$\begin{array}{r} 135 \\ \underline{70} \\ 650 \\ \underline{630} \\ 200 \\ \underline{140} \\ 60 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 70 \\ \hline 1,92 \end{array} \right. \leftarrow \text{Respuesta}$$

Problemas resueltos

1. Encontrar el resultado de: $7,\widehat{13} + 3,\widehat{4} + 3,\widehat{2}$

Resolución:

Sumando las partes enteras: $7 + 3 + 3$, y las partes decimales por separado:

$$0,\widehat{13} + 0,\widehat{4} + 0,\widehat{2}$$

$$7 + 3 + 3 + \frac{13}{99} + \frac{4}{9} + \frac{2}{9} =$$

$$13 + \frac{13}{99} + \frac{44}{99} + \frac{22}{99} = 13 + \frac{79}{99} = 13,\widehat{79}$$

2. Hallar la diferencia: $472,3 - 238,69$

Resolución:

$$\begin{array}{r} 472,3 \quad - \\ \underline{238,69} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 472,30 \quad - \\ \underline{238,69} \\ \hline 233,61 \end{array}$$

3. Multiplicar: $32,73 \times 2,6$

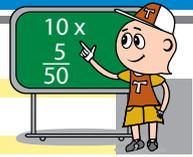
Resolución:

$$\begin{array}{r} 32,73 \times \\ \underline{2,6} \\ 19638 \\ \underline{6546} \\ 85,098 \end{array}$$

4. Dividir: $160,75 \div 5$

Resolución:

$$\begin{array}{r} 160,75 \quad \left| \begin{array}{r} 5 \\ \hline 32,15 \end{array} \right. \\ \underline{10} \\ --7 \\ \underline{25} \\ -0 \end{array}$$



Aplica lo comprendido

Realizar las siguientes operaciones:

1. $0,5 + 0,8 - 0,3$
2. $21,6 + 6,12 + 5,5$
3. $0,8 \times 5 + 1,2 \times 3$
4. $(0,1232323...) \div (3,666...)$
5. $(0,222...) \times (4,5)$

Aprende más



1. Efectuar: $(0,5 + 0,76) \times 5$
2. Efectuar: $(14 + 0,003 + 6) \times 9$
3. Efectuar: $12 \div 0,003$
4. Efectuar: $0,729 \div 9$
5. Efectuar: $0,132 \div 132$
6. Efectuar: $0,893 \div 19$
7. Efectuar: $50 - (6,31 + 14)$
8. Efectuar: $14 \times 0,08$
9. Efectuar: $0,64 \div 0,04$
10. Efectuar: $0,86 \div 0,0043$
11. Efectuar: $\frac{(0,03 + 0,456 + 8) \times 6}{25,458}$
12. Efectuar: $\frac{0,5 \times 3 + 0,6 \div 0,03 + 0,5}{0,08 \div 8 + 0,1 \div 0,1 - 0,01}$
13. Efectuar: $\left[\frac{1}{0,1} + \frac{1}{0,01} + \frac{1}{0,001} \right] \times 0,3$
14. Efectuar: $\left(\frac{0,06}{0,3} + \frac{0,052}{2} \right) \div \frac{6}{\frac{0,36}{3}}$
15. Efectuar: $\frac{5}{\frac{0,32}{2}} + \frac{0,3}{\frac{0,5}{0,001}}$

¡Tú puedes!



1. Si: $0,\widehat{ab} + 0,\widehat{ba} = 1,\widehat{3}$; hallar: $a + b$
 - a) 11
 - b) 12
 - c) 13
 - d) 14
 - e) 15
2. Efectuar y simplificar: $E = (\sqrt{2,333...} + \sqrt{0,58333...})^2$
 - a) $\frac{21}{2}$
 - b) $\frac{21}{4}$
 - c) $\frac{7}{2}$
 - d) $\frac{14}{3}$
 - e) $\frac{21}{8}$
3. Simplificar: $x = \frac{0,\widehat{2} + 0,\widehat{3} + \dots + 0,\widehat{7}}{0,3\widehat{2} + 0,4\widehat{3} + \dots + 0,8\widehat{7}}$
 - a) $0,8\widehat{3}$
 - b) $\frac{90}{119}$
 - c) $\frac{119}{450}$
 - d) $\frac{30}{357}$
 - e) 0,98
4. La suma de un número y dos veces su inversa es 8,25. ¿De qué número se trata?
 - a) 2
 - b) 3
 - c) 4
 - d) 0,75
 - e) 8

5. Si "a" y "b" son números naturales, hallar la suma de todos los valores posibles de "a" de modo que:

$$\frac{a}{9} + \frac{b}{5} = 3,066\dots$$

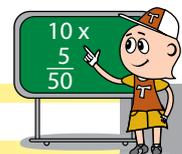
- a) 7 b) 21 c) 30 d) 15 e) 45



Practica en casa

1. Efectuar: $5,2 + [6,9 + (17,3 - 12,9)]$
2. Efectuar: $8,4 + \{6,2 + (5,7 + 2,1 - 3,2)\}$
3. Efectuar: $(3,5)(2,7)$
4. Efectuar: $(1,3)(2,5)(7,2)$
5. Efectuar: $(3,1)^2 \times (1,7)^2$
6. Efectuar: $7,2 \div 0,8 - (2,3)^2 + 6,5 \times 5,1$
7. Efectuar: $8,2 - \{6,1 - (2,5 + 2,03) + (1,1)^2\}$
8. Efectuar: $3,7 + [8,6 + (5,2 - 3,4)] - (2,3)^2$
9. Simplificar: $\frac{16}{\frac{0,01}{0,1}} + \frac{0,1}{\frac{0,02}{16}}$
10. Simplificar: $0,5 + 0,02 + \frac{1}{2}$
11. Simplificar: $\left[\frac{1}{4} + 0,04 + \frac{1}{5}\right] \times 0,03$
12. Simplificar: $\frac{0,25}{0,55} + \frac{1}{9} + 0,\widehat{56}$
13. Efectuar: $E = \frac{(0,7)^2 + (0,8)^2 + (0,9)^2}{3,82}$
14. Efectuar: $(0,\widehat{8} \div 0,\widehat{5} - 0,\widehat{6} \div 0,\widehat{7}) \times 2\frac{9}{13} + 3\frac{1}{2} \div 0,5$
15. Efectuar: $(3,\widehat{2} - 2,\widehat{8}) \times 3 + (0,\widehat{7} - 0,\widehat{5}) \div 2\frac{1}{2}$

Ejercicios de texto con números decimales



Aplica lo comprendido

1. Si una naranja cuesta S/. 0,80; ¿cuánto pagará Juan si desea adquirir 5 naranjas?
2. Por la compra de 5 kg de carne se pagó S/. 43. ¿Cuánto cuesta 1 kg de carne?
3. Si una caja de naranjas (100 en total) cuesta S/. 120, ¿cuánto cuesta una sola naranja?
4. Si un dólar equivale a S/. 3,15; ¿cuánto equivale 25 dólares en soles?
5. Si se pagó S/. 141,75; ¿a cuánto equivale en dólares sabiendo que un dólar equivale a S/. 3,15?



Aprende más

1. Pedro tiene \$ 5,64; Frank \$ 2,37 más que Pedro y Max \$ 1,15 más que Frank. ¿Cuánto tienen entre los tres?
2. Gaby compra por \$ 4,50 un par de zapatos, por \$ 2 menos un libro y un lapicero por la mitad de lo que le costaron el libro y los zapatos. ¿Cuánto le sobrará a Gaby después de hacer estos pagos, si tenía \$ 15,83?
3. Tenía \$ 14,25 el lunes, el martes cobré \$ 16,89; el miércoles cobré \$ 97 y el jueves pagué \$ 56,07. ¿Cuánto me queda?
4. Aldo tiene \$ 0,60 y quiere reunir \$ 3,75. Pide a su padre \$ 1,75 y éste le da \$ 0,17 menos de lo que le pide; luego pide a su hermano \$ 0,30 y éste le da \$ 0,15 más de lo que le pide. ¿Cuánto le falta para obtener lo que desea?
5. La altura de una persona es 1,85 m y la altura de una torre es 26 veces la altura de la persona menos 1,009 m. Hallar la altura de la torre.
6. Para pagar cierto número de cajas que compré a \$ 0,70 cada una, entregué 14 sacos de azúcar de \$ 6,25 cada uno. ¿Cuántas cajas compré?
7. Se han comprado cuatro cajas de manzanas por \$ 276. Al vender 85 manzanas por \$ 106,25 se ha ganado \$ 0,10 en cada manzana. ¿Cuántas manzanas se compraron?
8. La suma de dos números es 15,034 y su diferencia es 6,01. Hallar el menor de los números.
9. El triple de la suma de dos números es 84,492 y el doble de su diferencia es 42,02. Hallar el mayor de los números.
10. Una botella con gaseosa vale S/. 4,75 y la gaseosa vale S/. 3,75 más que la botella. Hallar el precio de la botella.
11. La diferencia de dos números es 6,80 y su cociente es 5. Hallar el mayor de los números.
12. Compró 100 libros por S/. 85. Vendo la quinta parte a S/. 0,50 cada uno; la mitad de los restantes a S/. 1,75 c/u y el resto a S/. 2 c/u. ¿Cuál es mi ganancia?
13. El vino de un tonel pesa 1 962 kg. Si cada litro pesa 0,981 kg, ¿cuántos litros contiene el tonel?
14. Un tonel lleno de vino pesa 614 kg. Si el litro de vino pesa 0,980 kg y el peso del tonel es 75 kg, ¿cuántos litros contiene el tonel?
15. Se compran 21 metros de cinta por S/. 7,35. ¿Cuánto costarán 18 metros?



Practica en casa



1. Un cohete viaja 744 km en 15,5 minutos. ¿Cuántos kilómetros viaja en un minuto?
2. Se quiere embotellar 43,5 litros de leche en botellas de 0,750 de litro. ¿Cuántas botellas se necesitan?
3. Cuatro cintas para grabar cuestan \$ 14,10. ¿Cuánto cuesta cada una?
4. Si por 3 kg de huevos se paga S/. 8,10 y en cada kg viene un promedio de 18 huevos, ¿cuánto cuesta cada huevo?
5. Si por 5 docenas de cuadernos se pagó \$ 57,6; ¿a cuánto debo vender cada cuaderno para ganar \$ 0,20?
6. El peso de un cm^3 de oro es de 19,2 gramos; de plomo 11,7 y de cobre 8,79. ¿En cuánto es más pesado 1 cm^3 de plomo más 1 cm^3 de cobre, que 1 cm^3 de oro?
7. Un jardín que tiene forma de rectángulo mide 40,25 m de ancho y 83,20 m de largo. ¿Cuántos metros de alambre tiene que comprar el jardinero para cercarlo, si quiere darle 3 vueltas?
8. Gaby ha comprado limones por un valor de \$ 6,75 y naranjas por un valor de \$ 13,278. Si entregó por el pago \$ 25, ¿cuánto le devolvieron?
9. Si tuviera 25 soles más de lo que tengo podría comprar un radio que cuesta S/. 87,50 y me sobran 13 soles, ¿cuál es mi capital?
10. Para pagar cierto número de paquetes de café que costaba \$ 3,60 cada uno, un comerciante entregó 72 sacos de maíz que costaban \$ 6,50 c/u. ¿Cuántos paquetes de café compró?
11. Pierdo \$ 19 en la venta de 95 sacos de azúcar a \$ 9,65 el saco. Hallar el costo de cada saco.
12. Un kg de carne de res cuesta S/. 12,80. ¿Cuánto se pagará por 2 $\frac{1}{2}$ kg? ¿Cuánto se pagará por 600 g?
13. Un kg de pollo cuesta S/. 7,20. ¿Cuánto se pagará por 3 $\frac{3}{4}$ kg? ¿Cuánto se pagará por 250 g?
14. Un litro de aceite cuesta S/. 2,80. ¿Cuánto costará 1,2 l? ¿Cuánto costará $\frac{3}{4}$ l de aceite?
15. a) ¿Qué parte de 0,2 es 0,125?
b) ¿Qué parte de 0,04 es 0,004?

Repaso



Aprende más

- En el salón del segundo año del colegio Trilce, hay 24 varones y 8 mujeres. ¿Qué parte del total son varones? ¿Qué parte de los varones son mujeres?
- Si Alex hace su tarea en 8 horas,
 - ¿Cuánto hace cada hora?
 - ¿Cuánto hace en dos horas?
- Los $\frac{3}{5}$ de qué número es 12
 - Los $\frac{4}{7}$ de qué número es 16?
- Si Lucho gasta 20 soles de los 45 soles que le dio su papá:
 - ¿Qué fracción de su dinero gastó?
 - ¿Qué fracción de su dinero le sobra?
 - ¿Qué parte de lo que gastó, no gastó?
- José compra una bolsa de caramelos por 30 soles y los vende por 35 soles:
 - ¿Qué fracción de lo que le costó gana?
 - ¿Qué fracción del precio de venta gana?
- De las fracciones:

$$\frac{3}{7}; \frac{7}{12}; \frac{7}{100}; \frac{12}{14}; \frac{12}{100}; \frac{55}{25}$$
 - Las fracciones propias son:
 - Las fracciones impropias son:
 - Las fracciones decimales son:
 - Las fracciones ordinarias son:
- Hallar los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{4}{9}$ de los $\frac{9}{8}$ de 40.
- De las fracciones: $\frac{3}{2}; \frac{5}{6}; \frac{7}{3}$ y $\frac{1}{2}$
 - Calcule el producto de las dos fracciones propias
 - Calcule la suma de las dos fracciones impropias
- Se mezcla 10 litros de ron con 2 de gaseosa. Si de la mezcla se vende 8 litros, ¿cuál es la cantidad de gaseosa que queda en la mezcla?
- Reducir a fracción ordinaria: $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$
- Simplificar: $1\frac{1}{5} \times 1\frac{1}{9} \times 1\frac{1}{8} \times 1\frac{3}{5}$
- Se tiene un barril que tiene 9 litros de ron y 6 litros de coca cola. Si se extraen 5 litros de la mezcla, ¿cuánto de coca cola queda en la mezcla?
- Un barril de 24 litros tiene 8 litros de ron y el resto de gaseosa. Si se extrae la cuarta parte del contenido y luego se extrae la mitad de lo que quedaba de la mezcla, determinar la cantidad de ron en la mezcla final.
- Reducir a fracción ordinaria: $2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$
- Los $\frac{15}{64}$ de una obra vale S/. 75, ¿cuánto vale los $\frac{3}{8}$ de la obra?

Practica en casa



- En el salón del segundo año del colegio Trilce, hay 72 varones y 18 mujeres. ¿Qué parte del total son varones?
- Si Alex hace su tarea en 6 horas:
 - ¿Cuánto hace en 3 horas?
 - ¿Cuánto hace en 4 horas?

3. a) Los $\frac{3}{5}$ de que número es 18.
b) Los $\frac{7}{9}$ de que número es 49.

Enunciado

Si Milenka, Alex y Pier hacen un trabajo en 6 horas, 18 horas y 36 horas respectivamente.

4. ¿Cuánto hace cada uno en tres horas?

Alex: Pier: Milenka:

5. ¿Cuánto hace en cada hora:

- Milenka y Alex juntos?
- Milenka y Pier juntos?
- Milenka, Alex y Pier juntos?

6. Si trabajan juntos Milenka y Alex, ¿en qué tiempo hacen el trabajo?

7. Si trabajan juntos Milenka y Pier, ¿en qué tiempo hacen el trabajo?

- Un hortelano planta $\frac{1}{4}$ de su huerta de tomates, $\frac{2}{5}$ de alubias y el resto, que son 280 m^2 , de patatas.

8. ¿Qué fracción ha plantado de patatas?

9. ¿Cuál es la superficie total de la huerta?

- El paso de cierta persona equivale a $\frac{7}{8}$ de metro.

10. ¿Qué distancia recorre con 1 000 pasos?

11. ¿Cuántos pasos debe dar para recorrer una distancia de 1 400 m?

12. En un frasco de jarabe caben $\frac{3}{8}$ de litro. ¿Cuántos frascos se pueden llenar con 4 litros y medio de jarabe?

13. Efectuar:

$$\frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \frac{4}{1} + \frac{5}{1} + \frac{6}{1}$$

14. Efectuar:

$$\frac{3}{5} \times \frac{15}{9} \times \frac{6}{45} \times \frac{8}{7} \times 49$$

15. a) ¿Qué parte de $\frac{3}{5}$ es $\frac{6}{9}$?

b) ¿Qué parte es $\frac{8}{7}$ de $\frac{24}{21}$?

UNIDAD 2



Principales variaciones de los números mayas de los números mayas con su equivalente en yucateco oral.

Numeración

¿Cómo contaban los mayas?

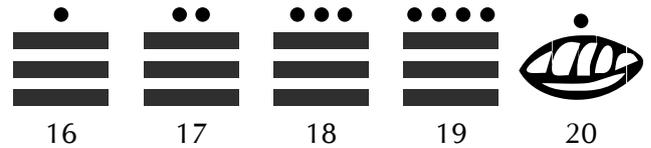
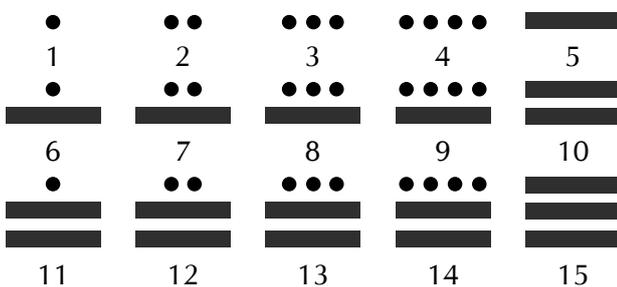
Los mayas conocían bien la matemática. Al igual que nosotros podían sumar, restar y escribir números muy grandes, hasta millones.

El sistema de los mayas era muy diferente al nuestro. Ellos usaban solo tres símbolos que son: un punto (que representa la unidad, 1); una barra (que representa cinco unidades) y un dibujo parecido a una concha y que representa el número cero.



¿Qué sistema de numeración usaban los mayas?

Los mayas contaban de veinte en veinte, es decir que usaban el sistema vigesimal. Puede ser que nuestro sistema decimal esté basado en los diez dedos de las manos. Los mayas tomaron en cuenta también los dedos de los pies y con los puntos y barras, los mayas podían contar hasta el número 19.



Si incluimos el número 0 podemos decir que son veinte números. Después de esto debían repetir los mismos números, pero no lo hacían como nosotros de izquierda a derecha, sino de abajo para arriba

APRENDIZAJES ESPERADOS

Comunicación matemática

- Escribirán y leerán los números en el sistema decimal
- Relacionarán los sistemas de numeración con sus cifras

Razonamiento y demostración

- Utilizarán la descomposición polinómica
- Explicarán los métodos para hacer cambios de base

Resolución de problemas

- Determinarán las cifras de un número con ciertas características.
- Determinarán los numerales en diferentes bases
- Relacionarán cifras, bases y numerales.

- ¿Cómo escribían los mayas el número 30?

Numeración decimal

En este capítulo aprenderemos:

- A reconocer las cifras del sistema de numeración.
- A escribir correctamente los números.
- A establecer los lugares y las órdenes de las cifras de un número.
- A utilizar la descomposición polinómica de los números.
- A determinar las cifras de los números, con ciertas condiciones.

¿La civilización egipcia ya conocía el sistema decimal?

El faraón Menes unificó los reinos hacia el año 2500 a.C., fundando la primera dinastía. Los egipcios crearon la más antigua escritura que se conoce, la escritura jeroglífica desarrollada sobre la base de dibujos que representaban de alguna manera la idea del número o idea de que se quería representar.

Esta cultura desarrolló su sistema de conteo muy original de base diez (10), contando por decenas, cada símbolo podía repetirse hasta nueve veces y el número representado se encontraba sumando los valores de cada uno de los jeroglíficos o símbolos empleados.

El principio de la numeración egipcia estaba compuesto de siete signos sencillos, que cualquier persona podía interpretar y realizar con ellos cuentas, aún si esta no supiera leer ni escribir, pero no se tenía plenamente identificado el concepto del valor posición. En la figura se representan los símbolos numéricos.

Así el número 33 se escribirá: ///○○○



- ¿Cómo expresarías el número 124 100?



Saberes previos

Completa con números:

2 centenas	↙	Hallar "x": $2x + 4 = 28$	↙	↙	4 centenas, 1 decena y 5 unidades
4 decenas	↙	Resolver: $6x - 5 = 7$	↙	↙	Máximo en un dado
↘	↘	Cubo de 6	↘	↘	↘
↘	↘	Cuadrado de 8	↘	↘	↘
Cifra de centenas en 1 037	↘	↘	LIV	↘	↘
Cifra de decenas en 1 342	↘	↘	Cubo de 8	↘	↘
↘	↘	↘	↘	↘	Una decena y media
↘	↘	↘	↘	↘	7 decenas
Tres cifras iguales	Resolver: $2x^2 - 2 = 30$	↘	↘	Número primo	↘
Resolver: $12 - 3x = 6$	Cifra de centenas de 3 456	↘	↘	Docena y media	↘
↘	↘	↘	↘	Número capicúa	↘
↘	↘	↘	↘	Menor cifra	↘



Conceptos básicos

Sistema de numeración

Es el conjunto de reglas, símbolos y principios que permiten escribir y leer correctamente los números.

Número

Es un ente abstracto que permite expresar cantidades

Numeral

Es la representación mediante símbolos, cifras o dígitos de un número

Observa que hay diferencia entre número y numeral, así para el **número** veinticuatro sus **numerales** son: 24; XXIV; ...



Sistema de numeración decimal

Es el sistema que nos permite representar los números y con ellos las cantidades. Debemos tener en cuenta:

Principios

Cada 10 unidades simples formarán una de orden superior, así:

10 unidades = 1 decena

10 decenas = 1 centena

10 centenas = 1 millar

Símbolos o dígitos

Los dígitos que se utilizan son: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 y 9

Reglas

Nos permite escribir los números de dos o más cifras.

Número de dos cifras = \overline{ab}

Número de tres cifras = \overline{abc}

Número capicúa de tres cifras = \overline{aba}

Cuando alguna cifra es desconocida, los numerales llevan una raya en la parte superior: $\overline{2a3}$, $\overline{4x5y}$, ...



➔ **Ejemplo:**

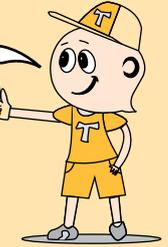
- Si el número $\overline{(a-2)(3a)(a+3)}$ está correctamente escrito, hallar "a"
 Si "a" es 2, la primera cifra es cero
 Si "a" es 4, la cifra (3a) es 12
 Estos resultados no pueden darse en el sistema decimal, entonces solo: $a = 3$



Nota:

Lugares ➔						
1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
4	6	8	2	3	9	1
7°	6°	5°	4°	3°	2°	1°
← Órdenes						

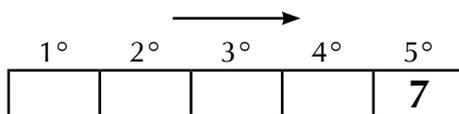
Así la cifra 4 en el numeral 124579, es la 3ra cifra pero también ocupa el 4to orden.



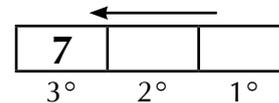
➔ **Ejemplo:**

- En un número, el 7 es la quinta cifra y a la vez ocupa el tercer orden, ¿cuántas cifras tiene?

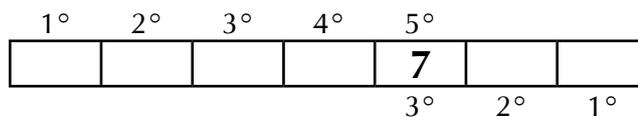
Quinta cifra:



Tercer orden:



Entonces:



El número tiene siete cifras

Descomposición polinómica

Valor absoluto

Es el valor de cada cifra sin considerar el lugar que ocupa dentro del número

Valor relativo

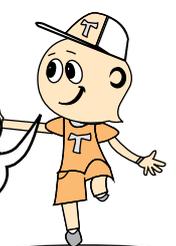
Es el valor que representa una cifra dentro del número

➔ **Ejemplo:**

Dado el número: 2 386

Número	2	3	8	6
Valor absoluto	2	3	8	6
Valor relativo	2×10^3	3×10^2	8×10	6

Así cada cifra tiene dos valores: el relativo y el absoluto.



Descomposición polinómica

Es la suma de los valores relativos de las cifras del número

$$2\ 386 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 8 \times 10 + 6$$

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c$$

➔ **Ejemplos:**

- Un número de dos cifras más otro formado por las mismas cifras pero en orden inverso.

$$\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b$$

- A un número de dos cifras le restamos otro número formado por las mismas cifras pero en orden inverso.

$$\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b$$



Nota:

- También se pueden considerar los siguientes casos:

$$\overline{2ab3} = 2\ 003 + \overline{ab0} = 2\ 003 + 10 \cdot \overline{ab}$$

$$\overline{4abc7} = 40\ 007 + \overline{abc0} = 40\ 007 + 10 \cdot \overline{abc}$$

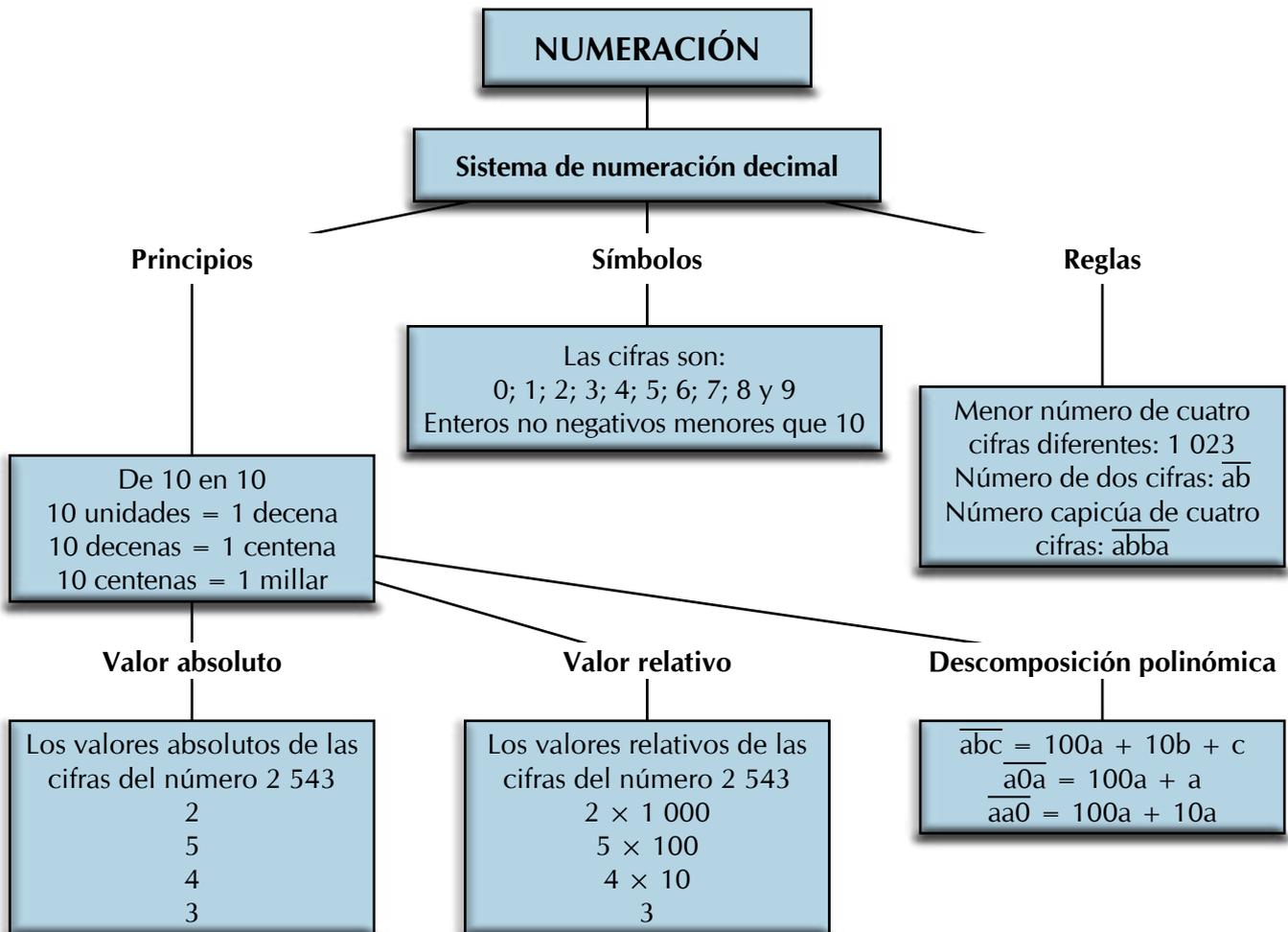
Observa:

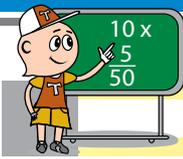
$$\overline{2ab} = 200 + 10a + b$$

$$\overline{2ab} = 2(10a + b) = 20a + 2b$$



Síntesis teórica





Aplica lo comprendido

- En el número 5 237:
 - La cifra de segundo orden es:
 - La segunda cifra es:
- Luego de descomponer los números, reducir:
 - $\overline{ab} + \overline{ba} =$ • $\overline{ab} - \overline{ba} =$
- ¿Cómo se representa en general:
 - Un número de tres cifras, con las dos primeras cifras iguales?
 - Un número de cuatro cifras que empiece en 2 y termine en 7?
- Luego de descomponer los números, reducir:
 - $\overline{a2} + 2a =$ • $\overline{aa} + \overline{bb} =$
- Descomponer y reducir:
 - El número: $\overline{a0a}$
 - El número: $\overline{aa0}$



Aprende más

- Para el número 524 793, relacione con líneas o flechas:

Orden	Cifra
Unidades	7
3er orden	2
Millares	3
2da cifra	4
- ¿Cuántas cifras tiene el numeral en el cual su cifra de tercer orden ocupa el quinto lugar?
- Hallar el numeral de tres cifras que cumpla las siguientes condiciones:
 - La primera cifra es el doble de la tercera cifra
 - La segunda cifra es el triple de la primera cifra.
 Dar como respuesta la suma de sus cifras
- Un número de dos cifras es igual a nueve veces la cifra de las unidades. ¿Cuál es la suma de sus cifras?
- Un numeral aumentado en el triple de su cifra de decenas resulta 93. Hallar la suma de sus cifras.
- ¿Cuántos números de dos cifras son iguales a cuatro veces la suma de sus cifras?
- Si el numeral $\overline{(a-1)(b+1)(a+5)(3-a)}$ es capicúa, hallar la cifra de tercer orden
- Un número esta formado por tres cifras en el cual la cifra de mayor orden es el doble de la cifra de menor orden y la cifra central es igual a la suma de las cifras extremas. ¿Cuántos números cumplen dicha condición?
- ¿Cuántos números de dos cifras son iguales a siete veces la suma de sus cifras?
- Hallar un número de dos cifras cuya suma de cifras es 14, tal que si se invierte el orden de sus cifras, el número aumenta en 18.
- Si a un numeral se le agrega la suma de sus cifras, se invierte el orden de sus cifras. Hallar el producto de sus cifras.
- Si a un número de tres cifras que empieza con la cifra 6, se le suprime esta cifra, el número resultante es $\frac{1}{26}$ del número original. Hallar la suma de sus cifras
- Un automóvil parte del kilómetro $\overline{a0(2b)}$ con una velocidad $\overline{b(2b)}$ km/h. ¿Luego de cuánto tiempo llegará al kilómetro $\overline{a(2b)(6b)}$?
- Una persona nació en el año $\overline{19aa}$ y en el año $\overline{19bb}$ cumplió "4a + 5b" años. ¿En qué año tuvo "a + b" años?
- Un depósito tiene \overline{ab} litros y se empieza a llenar con un caudal constante. Al cabo de media hora tiene \overline{ba} litros y cumplida la primera hora tendrá: $\overline{(a-1)(a+1)(b-2)}$ litros. Hallar "a + b"

Aplicación cotidiana

Las nuevas placas vehiculares

A partir del lunes 4 de enero del 2010, se comenzó a entregar la nueva placa única nacional de rodaje. El juego de placas consiste en dos placas de aluminio en la cual destaca la Bandera Nacional y un holograma de alta seguridad que resalta la figura del Escudo y de Machu Picchu y tiene en la parte inferior grabado el número de matrícula, por lo que es personalizado. Asimismo tiene un sello de agua y un número de código en láser. Una tercera placa estará adherida en el parabrisas donde se encuentra el copiloto y cuenta con un chip que permitirá a la policía tener la historia del vehículo en tiempo real.



- 16. Con las primeras letras de tu apellido y el mayor número de cifras diferentes, ¿qué placa se formaría?
- 17. ¿Podrá haber una placa cuyo número sea igual a la suma de sus cifras? ¿Cuántas?



¡Tú puedes!

- 1. Hallar la suma de cifras de un número de la forma \overline{abcabc} tal que sumado con el producto del número \overline{abc} por el menor número capicúa de dos cifras, resulte un número conformado por 9 decenas de centenas de tercer orden, 46 centenas de decenas y 22 diezmilésimas unidades de sexto orden.
 - a) 15 b) 16 c) 17 d) 18 e) 34
- 2. En una ciudad de \overline{abc} personas, \overline{bcc} son hombres, \overline{ab} son mujeres y "b" niños. Hallar "a + b + c", si "a"; "b" y "c" son cifras significativas distintas.
 - a) 14 b) 15 c) 17 d) 18 e) 19
- 3. Sabiendo que: $\frac{\overline{abba}}{2} = \frac{\overline{a} \overline{a}}{2} \cdot \frac{\overline{b} \overline{b}}{2}$
Hallar "a" y "b".
 - a) 2 y 3 b) 3 y 4 c) 9 y 5 d) 5 y 6 e) 2 y 4
- 4. Si: $\overline{abcd} = 37 \cdot \overline{ab} + 62 \cdot \overline{cd}$, hallar el valor de "a + b + c + d"
 - a) 15 b) 16 c) 14 d) 17 e) 19
- 5. Si a un número de tres cifras se le agrega un 5 al comienzo y otro 5 al final, el número obtenido es 147 veces el número original. Dar como respuesta la suma de las cifras de dicho número.
 - a) 14 b) 11 c) 17 d) 18 e) 16



Practica en casa

- 1. ¿Cuántas cifras tiene el numeral, en el cual su cifra de cuarto orden ocupa el sexto lugar?
- 2. Dado el número $\overline{(a + 1)(b + 1)(2b - 1)(2a - 3)}$ que es capicúa, hallar "a.b"
- 3. Para el número 35 791, relacione con líneas o flechas.

Orden	Cifra
Unidades	7
5 ^{to} orden	5
Centenas	3
2 ^{da} cifra	1

4. Para el número 57 812, completa:
- La mayor cifra es:
 - La cifra de mayor orden es:
 - La última cifra es:
5. Para que el numeral $\overline{(a-2)a(3a)}$ este correctamente escrito, el valor de "a" es:
6. Hallar un número mayor que 800 y menor que 1 000, tal que la cifra de las centenas sea el doble de la cifra de las unidades y esta el doble del de las decenas.
7. Si al número \overline{ab} le restamos el numeral que se obtiene al invertir el orden de sus cifras se obtiene 72, hallar "a + b"
8. Descomponer polinómicamente: $\overline{b(2b)(7+b)}$.
9. Si Alex tiene \overline{ab} años y dentro de "6a" años tendrá 66 años, hallar "a . b"
10. Si el numeral $\overline{(2a)(a-4)a}$ está correctamente escrito, hallar "a"
11. Si: $\overline{(a+3)(3b-5)(4b)(6-a)(c-1)}$ es capicúa; hallar: "a + b + c".
12. Si a un número de dos cifras se le suma el que resulta de invertir el orden de sus cifras se obtiene 187. ¿Cuál es el producto de las cifras de dicho numeral?
13. Al multiplicar un número de dos cifras por 3, se obtiene lo mismo que multiplicar por 8 al número que resulta de invertir el orden de sus cifras. ¿Cuál es dicho producto?
14. Si a un numeral de dos cifras se le suma el triple de la suma de sus cifras se obtiene 42. Hallar la suma de cifras del numeral.
15. Un número que esta comprendido entre 600 y 700 es tal que si se suprime la cifra de mayor orden el número resultante es 1/25 del original. Dar como respuesta el producto de cifras del número.

Numeración en otras bases

En este capítulo aprenderemos:

- A relacionar los sistemas de numeración con sus cifras.
- A utilizar la descomposición polinómica.
- A determinar los numerales en diferentes bases.
- A relacionar cifras, bases y numerales.

¿Cuántos byte hay en un kilobyte?



Primero hay que ir al origen del almacenamiento de la información en forma digital, la unidad básica es el BIT, físicamente es un switch. Así solo puede ser 0 o 1 (0 = apagado, 1 = encendido); o sea 2 posibilidades, 2 BIT

Si tenemos dos switches, podrán ser llenados por 00; 01; 10; 11 o sea 4 BIT

Si tenemos tres switches, podrán ser llenados por 000; 001; 010;; 111 o sea 8 BIT, que es la siguiente unidad llamada byte, así: 1 byte = 8 BIT

Para formar la siguiente unidad: 2^{10} byte = 1 024 byte = 1 kilobyte

y la unidad: 2^{10} kilobyte = 1 024 kilobyte = 1 Megabyte

- ¿Cuántos switch forman 1 kb?
- ¿Cuántos switch forman 1 Mb?

Saberes previos

Completa con números:

Menor # par de cuatro cifras diferentes			Capicúa de tres cifras		Menor # de 4 cifras		Primo y par
Docena			Año bisiesto		Capicúa		VR de 2 en 1234
Cuadrado de 20			$8 - 2 \times 3$			X	
Capicúa de dos cifras			Una decena			Cubo de 8	
		$5^2 + 3 \times 5 + 2$					
		2 decenas, 1 millar, 5 unidades					
	9 decenas			Potencia de 2	CCXI		# no primo ni compuesto
	Mayor # de tres cifras diferentes				Enroque		Cuadrado de 20
Múltiplo de 11			Mayor # de dos cifras				
Potencia de 2			Cuadrado perfecto				
				9 centenas, 3 unidades, 8 decenas, 2 millares		Menor cifra	
						Una mano	
		Mayor # de tres cifras			Medio centenar		
		Múltiplo de 9			Múltiplo de 19		

Conceptos básicos

Sistema de numeración

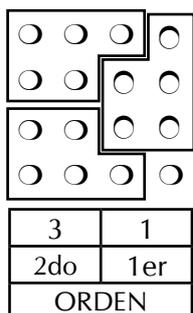
Para escribir y leer los números, en los sistemas posicionales es necesario conocer los principios, símbolos y reglas del sistema de numeración.

Principios

Base: Representa la cantidad de unidades que forman una unidad superior

➔ Ejemplo:

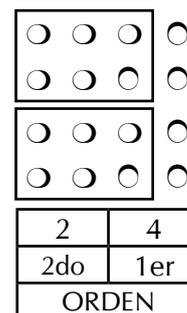
En el sistema quinario (base cinco) 5 unidades formarán una unidad superior. Entonces como se escribe:



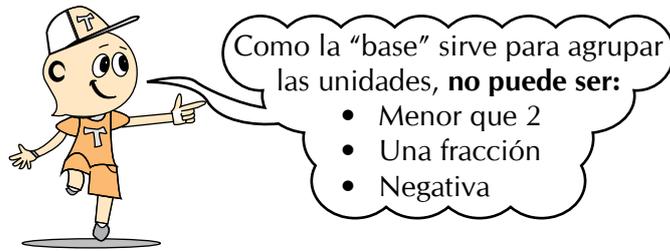
Entonces la forma de escribir será: $31_{(5)}$

➔ Ejemplo:

En el sistema senario (base seis) 6 unidades formarán una unidad superior. Entonces como se escribe:



Entonces la forma de escribir será: $24_{(6)}$

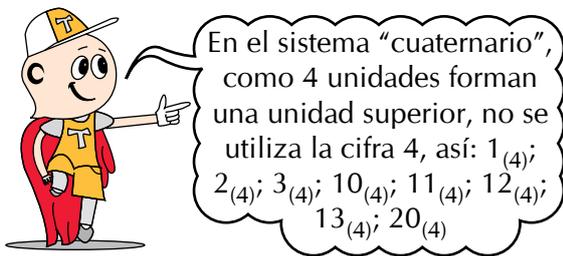


Símbolos

Como al completar una cantidad de unidades igual a la base, éstas forman una unidad superior, las cifras son números enteros no negativos y menores que la base.

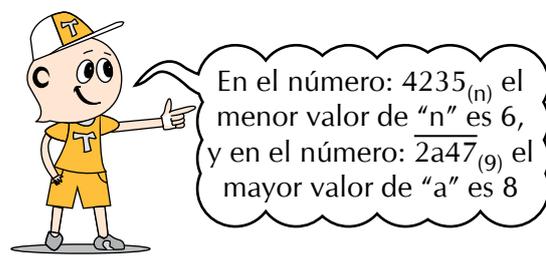
➔ **Ejemplo:**

En el sistema cuaternario (base cuatro), las cifras son: 0; 1; 2 y 3.



➔ **Ejemplo:**

En el sistema heptal (base siete), las cifras son: 0; 1; 2; 3; 4; 5 y 6



Reglas

Cada cifra representa una cantidad dentro del número, así definimos el valor absoluto y relativo de cada cifra.

➔ **Ejemplo:**

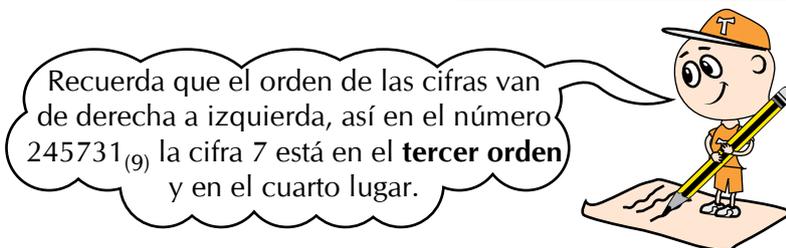
Sea el número: 2453₍₈₎

Cifra	Valor absoluto	Valor relativo
1er orden	3	3
2do orden	5	5×8^1
3er orden	4	4×8^2
4to orden	2	2×8^3

➔ **Ejemplo:**

Sea el número: 12345_(n)

Cifra	Valor absoluto	Valor relativo
1er orden	5	5
2do orden	4	$4 \times n^1$
3er orden	3	$3 \times n^2$
4to orden	2	$2 \times n^3$
5to orden	1	$1 \times n^4$



Consecuencias

- La base de un sistema debe ser un número entero y mayor que uno, en consecuencia hay infinitos sistemas de numeración.

- Sistema cuaternario (base 4)
- Sistema octal (base 8)
- Sistema duodecimal (base 12)

- La base de un sistema de numeración es mayor que sus cifras.

Sistema de numeración	Base	Cifras
Binario	2	0; 1
Ternario	3	0; 1; 2
Cuaternario	4	0; 1; 2; 3
Quinario	5	0; 1; 2; 3; 4
Senario	6	0; 1; 2; 3; 4; 5
Decimal	10	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9
Undecimal	11	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; α
Duodecimal	12	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; α ; β
Enésimal	n	0; 1; 2; 3; ...; (n - 2); (n - 1)

En el sistema decimal hay 10 cifras. En el sistema heptal, 7 cifras. Así en el sistema de base "n" hay "n" cifras.



La descomposición polinómica de un número, es un polinomio donde los coeficientes son las cifras y la variable la base.

$$247_{(9)} = 2 \times 9^2 + 4 \times 9 + 7$$

$$20405_{(7)} = 2 \times 7^4 + 0 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 0 \times 7 + 5$$

$$\overline{2a0b}_{(5)} = 2 \times 5^3 + a \times 5^2 + 0 \times 5 + b$$

$$\overline{abcd}_{(n)} = a \times n^3 + b \times n^2 + c \times n + d$$

En este polinomio: $2 \times n^3 + 4 \times n^2 + 3 \times n + 6$ los coeficientes son las cifras del número: $2436_{(n)}$



Conteo en otras bases:

- Base 8

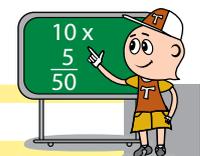
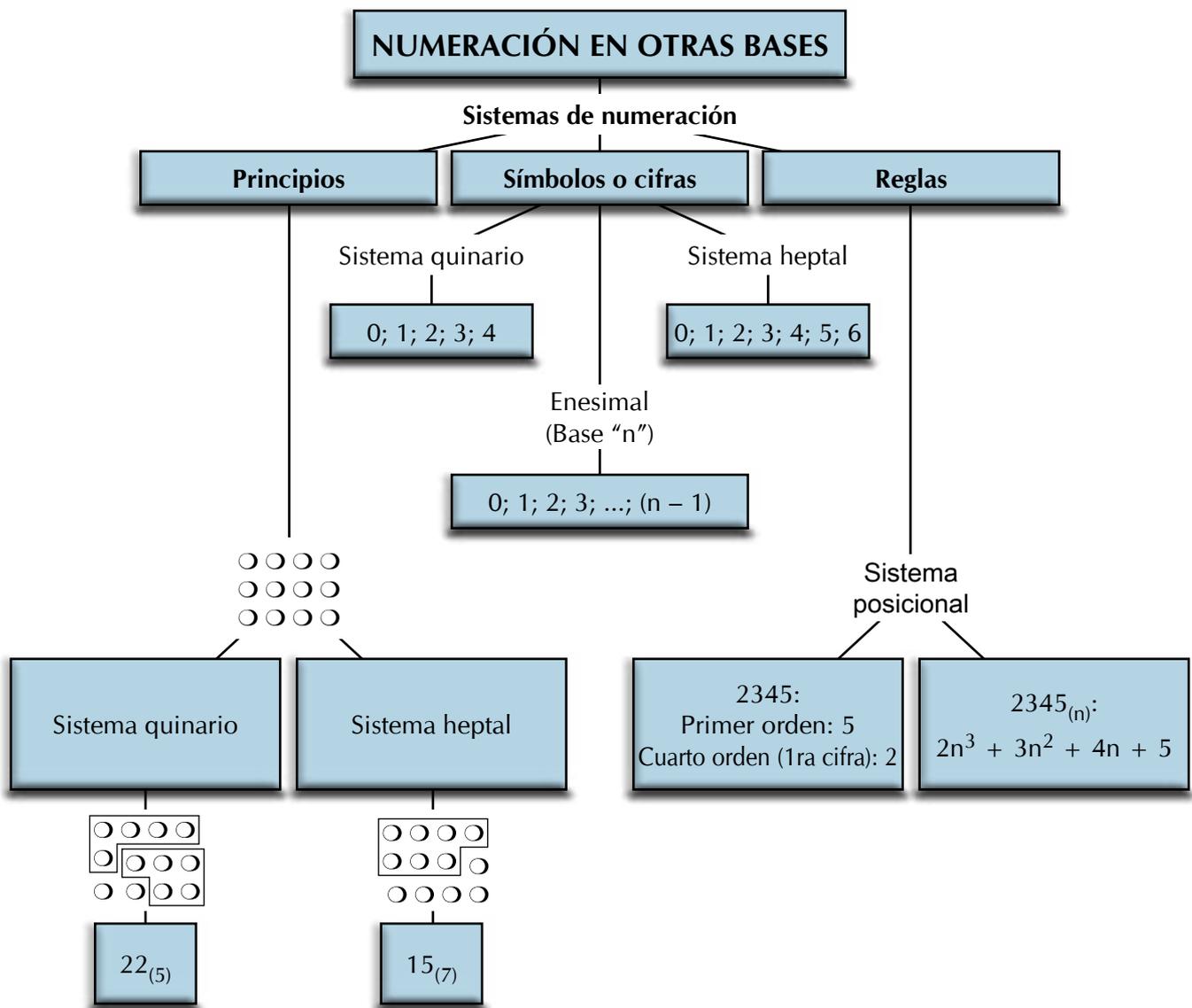
$1_{(8)}$	$2_{(8)}$	$3_{(8)}$	$4_{(8)}$	$5_{(8)}$	$6_{(8)}$	$7_{(8)}$	$10_{(8)}$
$11_{(8)}$	$12_{(8)}$	$13_{(8)}$	$14_{(8)}$	$15_{(8)}$	$16_{(8)}$	$17_{(8)}$	$20_{(8)}$
$21_{(8)}$	$22_{(8)}$	$23_{(8)}$	$24_{(8)}$	$25_{(8)}$	$26_{(8)}$	$27_{(8)}$	$30_{(8)}$
$31_{(8)}$	$32_{(8)}$	$33_{(8)}$	$34_{(8)}$	$35_{(8)}$	$36_{(8)}$	$37_{(8)}$	$40_{(8)}$
$41_{(8)}$	$42_{(8)}$	$43_{(8)}$	$44_{(8)}$	$45_{(8)}$	$46_{(8)}$	$47_{(8)}$	$50_{(8)}$
$51_{(8)}$	$52_{(8)}$	$53_{(8)}$	$54_{(8)}$	$55_{(8)}$	$56_{(8)}$	$57_{(8)}$	$60_{(8)}$
$61_{(8)}$	$62_{(8)}$	$63_{(8)}$	$64_{(8)}$	$65_{(8)}$	$66_{(8)}$	$67_{(8)}$	$70_{(8)}$
$71_{(8)}$	$72_{(8)}$	$73_{(8)}$	$74_{(8)}$	$75_{(8)}$	$76_{(8)}$	$77_{(8)}$	$100_{(8)}$
$101_{(8)}$	$102_{(8)}$	$103_{(8)}$	$104_{(8)}$	$105_{(8)}$	$106_{(8)}$	$107_{(8)}$	$110_{(8)}$
$111_{(8)}$	$112_{(8)}$	$113_{(8)}$	$114_{(8)}$	$115_{(8)}$	$116_{(8)}$	$117_{(8)}$	$120_{(8)}$

- Base 6

$1_{(6)}$	$2_{(6)}$	$3_{(6)}$	$4_{(6)}$	$5_{(6)}$	$10_{(6)}$
$11_{(6)}$	$12_{(6)}$	$13_{(6)}$	$14_{(6)}$	$15_{(6)}$	$20_{(6)}$
$21_{(6)}$	$22_{(6)}$	$23_{(6)}$	$24_{(6)}$	$25_{(6)}$	$30_{(6)}$
$31_{(6)}$	$32_{(6)}$	$33_{(6)}$	$34_{(6)}$	$35_{(6)}$	$40_{(6)}$
$41_{(6)}$	$42_{(6)}$	$43_{(6)}$	$44_{(6)}$	$45_{(6)}$	$50_{(6)}$
$51_{(6)}$	$52_{(6)}$	$53_{(6)}$	$54_{(6)}$	$55_{(6)}$	$100_{(6)}$
$101_{(6)}$	$102_{(6)}$	$103_{(6)}$	$104_{(6)}$	$105_{(6)}$	$110_{(6)}$



Síntesis teórica



Aplica lo comprendido

1. Determina el menor valor que tiene "n" en cada caso:
 - $2341_{(n)} \Rightarrow n =$
 - $370_{(n)} \Rightarrow n =$
 - $2003001_{(n)} \Rightarrow n =$

2. Determina el mayor valor de "x" en cada uno de los números:
 - $\overline{12x21}_{(7)} \Rightarrow x =$
 - $\overline{20x2}_{(5)} \Rightarrow x =$

- $\overline{1(x+2)24}_{(8)} \Rightarrow x =$
3. En el sistema de numeración heptal (base 7):
 - El mayor número de cuatro cifras diferentes es:
 - El menor número de cuatro cifras diferentes es:

 4. ¿Cómo se escribe: $2 \times 9^3 + 4 \times 9^2 + 3 \times 9 + 6$ en el sistema nonario?

 5. ¿Cómo se descompone el número: $\overline{23a45}_{(x)}$?

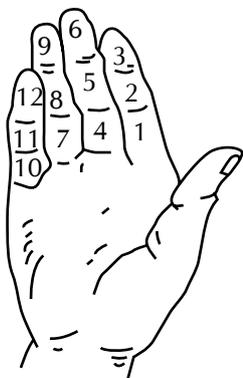


Aprende más

- Determina el menor valor que tiene "n" en cada caso:
 - $2003001_{(n-2)} \Rightarrow n = \dots\dots\dots$
 - $20601_{(n+3)} \Rightarrow n = \dots\dots\dots$
- Determina el mayor valor de "x" en cada uno de los números:
 - $\overline{1(x+2)24}_{(8)} \Rightarrow x = \dots\dots\dots$
 - $\overline{(x+2)2x1}_{(6)} \Rightarrow x = \dots\dots\dots$
- ¿Cuántas cifras tiene: $2 \times 9^6 + 4 \times 9^4 + 3 \times 9^2 + 6$ al ser escrito en base nueve?
- Determina "a + b", si los números: $14_{(6)}$; $\overline{1a}_{(6)}$; $\overline{b0}_{(6)}$ son consecutivos
- Calcular "a", si: $\overline{1a2}_{(5)} = 60_{(7)}$
- Determina "m", si: $\overline{23\alpha}_{(13)} = \overline{38m}$
- Hallar "x", si: $\overline{13x0}_{(4)} = 120$
- ¿Cuántas cifras tiene el número:
 - $2 \times 7^5 + 3 \times 7^2 + 4$ en base 7?
 - $3 \times 5^7 + 2 \times 5^{12} + 3$ en base 5?
 - $2 \times 9^7 + 1 \times 9^4 + 2$ en base 9?
 Dar como respuesta la suma de "A", "B" y "C".
- Determina la suma de cifras del resultado en el sistema senario de: $23_{(6)} + 54_{(6)}$.
- Si los numerales $\overline{aa3}_{(b)}$; $\overline{b45}_{(8)}$ y $25_{(a)}$ están correctamente escritos, hallar "a + b".
- Un número en el sistema binario se escribe como 101010, ¿en qué sistema se representa como 132?
- ¿Cuál es la suma de las cifras del numeral en el sistema quinario de: $2 \times 5^6 + 7 \times 5^4 + 3 \times 5^2 + 6$?
- Determina el valor de "a", si: $\overline{a64} = \overline{a0a4}_{(5)}$.
- ¿Para qué valor de "a" se cumple: $\overline{a02}_{(9)} = \overline{aa11}_{(4)}$?
- Hallar "a", si: $\overline{a4a}_{(7)} = \overline{120a}_{(5)}$

Aplicación cotidiana

Las docenas, gruesas y masas



El origen del sistema duodecimal también está ligado al cálculo por los dedos: puesto que los cuatro dedos de la mano (a excepción del pulgar) tienen 12 falanges en total, pasando el dedo pulgar por estas falanges se puede contar de 1 hasta 12. Los vestigios del sistema duodecimal se han conservado en la lengua hablada hasta nuestros días: en lugar de "doce" a menudo decimos "docena". Muchos objetos (cuchillos, tenedores, platos, pañuelos, etc.) suelen contarse por docenas. Hoy día casi no se emplea la palabra "gruesa", que significa doce docenas (o sea, la unidad del tercer orden en el sistema duodecimal), pero hace unas decenas de años era una palabra bastante extendida especialmente en el mundo del comercio. La docena de gruesas se llamaba "masa", aunque hoy día pocas personas conocen esta significación de la palabra "masa".

- En 3 941 huevos, ¿cuántas masas, gruesas y docenas existen?
- La cantidad de piezas de cubiertos es: 3 gruesas, 2 masas, 5 cubiertos y 4 docenas. ¿Cuántos cubiertos hay en total?



¡Tú puedes!

- Si el número: $a(b + 3)(b - 2)\left(\frac{a}{2}\right)(2b - 1)(2a + 1)_{(6)}$ está correctamente escrito, calcular "a + b".
 a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6
- Calcular "n", si: $12_{12}12_n = 20$
 a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16
- Hallar "a + b + c", si el número: $\overline{(n + 1)(n^3)(n - 2)}_{(9)}$ en el sistema decimal se representa por \overline{abc} .
 a) 10 b) 9 c) 8 d) 7 e) 6
- Determina la suma de las cifras del número: $(n + 2) \cdot n^6 + (n + 3) \cdot n^4 + (n + 2) \cdot n^2 + n$, cuando se representa en el sistema enesimal.
 a) 10 b) 8 c) 6 d) 7 e) 11
- Si el numeral: $\overline{(a + 3)(2b)(a + 3)(5 - a)}_{(5)}$ es capicúa, ¿cómo se representa en el sistema decimal?
 a) 620 b) 630 c) 624 d) 625 e) 675



Practica en casa

- Calcula la suma de las cifras del mayor número octal de cuatro cifras diferentes.
- Relaciona correctamente mediante flechas:

• La menor base impar	octal
• La cifra máxima es 5	vigesimal
• La base ocho	senaria
• La cifra máxima es 19	ternaria
- Determina el menor valor de "n" en cada caso:
 - $50302_{(n-2)} \Rightarrow n = \dots\dots\dots$
 - $80609_{(n+3)} \Rightarrow n = \dots\dots\dots$
- La suma de las cifras del numeral que representa a 41 en el sistema senario.
- Determina el mayor valor de "x" en cada uno de los números:
 - $\overline{1(x-2)24}_{(7)} \Rightarrow x = \dots\dots\dots$
 - $\overline{(x+3)2x1}_{(9)} \Rightarrow x = \dots\dots\dots$
- ¿Cuántas cifras tiene: $5 \times 7^6 + 4 \times 7^4 + 7^2 + 2$ al ser escrito en base siete?
- Calcular "a", si: $\overline{1a3}_{(4)} = 30_{(9)}$
- Determina "m", si: $\overline{13\alpha}_{(12)} = \overline{1m0}$
- Hallar "x", si: $\overline{13x0}_{(5)} = 215$
- ¿Cuántas cifras tiene el número:
 - A. $2 \times 7^5 + 3 \times 7^8 + 4$ en base 7?
 - B. $3 \times 5^7 + 2 \times 5^2 + 3$ en base 5?
 - C. $2 \times 9^5 + 1 \times 9^4 + 2$ en base 9?
 Dar como respuesta la suma de "A", "B" y "C".
- Determina el valor correcto de "x" en cada caso:
 - $N = \overline{3(2x)6(x-3)4(3x)}_{11} \Rightarrow x = \dots\dots\dots$
 - $N = 4\left[\frac{x+1}{3}\right]x(x-5)_{(6)} \Rightarrow x = \dots\dots\dots$
 - $N = \overline{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}_{(6)} \Rightarrow x = \dots\dots\dots$
- Determina la suma de cifras del resultado en el sistema heptal de: $23_{(7)} + 54_{(7)}$.
- Si los numerales $\overline{aa3}_{(b)}$, $\overline{b45}$ y $75_{(a)}$ están correctamente escritos, hallar "a + b"
- Si los números están correctamente escritos: $\overline{b3c}_{(8)}$, $\overline{1b3}_{(c)}$ y $45_{(b)}$, hallar "2b + c"
- Calcular la suma de cifras de: $9^{10} + 4 \times 9^7 + 12 \times 9^4 + 10$ cuando se escribe en el sistema nonario.

Relación entre sistemas de numeración

En este capítulo aprenderemos:

- A relacionar los sistemas de numeración con sus cifras.
- A explicar los métodos para hacer cambios de base.
- A determinar los numerales en diferentes bases.
- A relacionar cifras, bases y numerales.

𐎶	1	𐎶	11	𐎶𐎶	21	𐎶𐎶𐎶	31	𐎶𐎶𐎶𐎶	41	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	51
𐎷	2	𐎶𐎷	12	𐎶𐎶𐎷	22	𐎶𐎶𐎶𐎷	32	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎷	42	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎷	52
𐎸	3	𐎶𐎸	13	𐎶𐎶𐎸	23	𐎶𐎶𐎶𐎸	33	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎸	43	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎸	53
𐎹	4	𐎶𐎹	14	𐎶𐎶𐎹	24	𐎶𐎶𐎶𐎹	34	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎹	44	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎹	54
𐎺	5	𐎶𐎺	15	𐎶𐎶𐎺	25	𐎶𐎶𐎶𐎺	35	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎺	45	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎺	55
𐎻	6	𐎶𐎻	16	𐎶𐎶𐎻	26	𐎶𐎶𐎶𐎻	36	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎻	46	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎻	56
𐎼	7	𐎶𐎼	17	𐎶𐎶𐎼	27	𐎶𐎶𐎶𐎼	37	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎼	47	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎼	57
𐎽	8	𐎶𐎽	18	𐎶𐎶𐎽	28	𐎶𐎶𐎶𐎽	38	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎽	48	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎽	58
𐎾	9	𐎶𐎾	19	𐎶𐎶𐎾	29	𐎶𐎶𐎶𐎾	39	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎾	49	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎾	59
𐎿	10	𐎶𐎿	20	𐎶𐎶𐎿	30	𐎶𐎶𐎶𐎿	40	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎿	50		

¿Por qué 1 hora tiene 60 minutos?

En la Babilonia antigua, cuya cultura era bastante elevada, está comprobada la amplia difusión del sistema sexagesimal.

Los historiadores discrepan en cuanto a sus orígenes:

Una hipótesis, es que se produjo la fusión de dos tribus una de las cuales usaba el sistema senario y la otra el sistema decimal, surgiendo como compromiso entre los dos el sistema sexagesimal.

Otra hipótesis es que los babilonios consideraban el año compuesto de 360 días lo que se relacionaba de modo natural con el número 60.

A pesar de que no están aún claros los orígenes del sistema sexagesimal, está comprobada con suficiente seguridad su existencia y amplia difusión en Babilonia.

Este sistema, se ha conservado en cierta forma hasta nuestros días (en la subdivisión de la hora en 60 minutos y del minuto en 60 segundos, así como en el sistema análogo de medición de los ángulos: 1 grado = 60 minutos y 1 minuto = 60 segundos).

- ¿Cuántas cifras o dígitos utiliza el sistema sexagesimal usado por los babilonios?
 - Si cada día era representado por una cifra, ¿cuántos meses tenía el año?

Saberes previos

Completa con números:

Mayor # de dos cifras en base 5	↙	56 ₍₈₎ a la base 10	↙			334 ₍₉₎ a la base 10	Menor número de cuatro cifras diferentes (base 10)
# primo		Una mano				19 en base 5 es	
				12 ₍₅₎ a base 10			
				245 ₍₇₎ a base 10 es			
Consecutivos			decena y media			Máxima cifra en base 7	
Capicúa	↙		200 ₍₃₎ en base 10			4 decenas	
Mayor número de cuatro cifras diferentes en base 10						Primo par	
						Potencia de 3	
		Número par		Mayor # de dos cifras en base 7			
		Media centena		Mayor # de tres cifras en base 4			
	Mínima base		Potencia de 3				277 ₍₉₎ a base 10
	Base nonal		Una gruesa	↙			Cuadrado de 5
						Número capicúa	
						Potencia de 2	
Factorial de 5		Cuadrado de 7				83 en la base 5 es	
Cubo de 4	↑	100 ₍₆₎ a base 10	↑			80 en base 7 es	

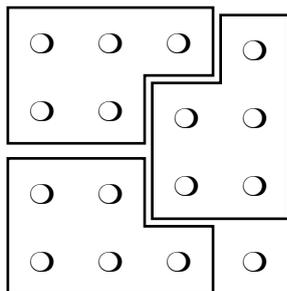
Conceptos básicos

Cambios de base

El objetivo es poder representar un número en los diferentes sistemas de numeración.

Del sistema decimal a otro sistema

Recuerda: Para escribir en el sistema quinario:



Entonces la forma de escribir será: 31₍₅₎

En general, para llevar un número del sistema decimal a base "n", el número se divide entre "n" hasta obtener un cociente menor a "n", este último cociente y los restos obtenidos son las cifras del número en base "n".

→ Ejemplo:

- Escribir 123 en el sistema quinario

$$\begin{array}{r|l} 123 & 5 \\ \hline 3 & 24 \\ & 5 \\ \hline & 4 \end{array}$$

Entonces se escribirá: $443_{(5)}$

De otro sistema al sistema decimal

Recuerda que la descomposición polinómica de: $23_{(7)}$ es $2 \times 7 + 3$.

Y al realizar las operaciones se obtiene 17, entonces: $23_{(7)} = 17$

En general para llevar el número al sistema decimal, se debe descomponer polinómicamente y luego realizar las operaciones.

→ Ejemplo:

- Llevar $1234_{(7)}$ al sistema decimal

Descomponemos el número:

$$1 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 3 \times 7 + 4$$

luego se realiza las operaciones:

$$343 + 98 + 21 + 4 = 466, \text{ entonces: } 1234_{(7)} = 466$$

Entre dos sistemas diferentes del decimal

Lo recomendable es utilizar los dos métodos anteriores para que el sistema decimal sirva como nexo entre los dos sistemas diferentes del decimal.

→ Ejemplo:

Llevar $253_{(7)}$ al sistema quinario.

Descomponemos para llevar al sistema decimal:

$$253_{(7)} = 2 \times 7^2 + 5 \times 7 + 3 = 136$$

Ahora dividimos para llevar al sistema quinario:

$$\begin{array}{r|l} 136 & 5 \\ \hline 1 & 27 \\ & 5 \\ \hline & 2 & 5 \\ & & 5 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

$$\text{Luego: } 253_{(7)} = 1021_{(5)}$$

Recuerda que....

El último cociente debe ser menor que la base y se toma de abajo hacia arriba.

Recuerda que....

Se descompone y se realizan las operaciones en el sistema decimal.



Observaciones:

A mayor base le corresponde menor numeral

Del ejemplo anterior: $253_{(7)} = 1021_{(5)}$, se observa que el numeral en base 5 tiene cuatro cifras mientras que en base 7 solo tres cifras.

$$\begin{array}{ccc} \text{Menor numeral} & & \text{Mayor numeral} \\ - & & + \\ 253_{(7)} & = & 1021_{(5)} \\ + & & - \\ \underbrace{\hspace{2cm}} & & \underbrace{\hspace{2cm}} \\ \text{Mayor base} & & \text{Menor base} \end{array}$$

Método de Ruffini

Es un método que permite pasar al sistema decimal un número escrito en otro sistema.

Llevar $2354_{(7)}$ a base diez

	2	3	5	4
Base 7	↓	14	119	868
	2	17	124	872



Síntesis teórica

NUMERACIÓN III

Cambios de base

Al sistema decimal

Descomposición polinómica

$$\begin{aligned}
 2345_{(7)} &= 2 \times 7^3 + 3 \times 7^2 + 4 \times 7 + 5 \\
 &= 686 + 147 + 28 + 5 \\
 &= 866
 \end{aligned}$$

Del sistema decimal

Divisiones entre la base

445 al sistema senario (base 6)

$$\begin{array}{r}
 445 \mid 6 \\
 \underline{6} \\
 74 \\
 \underline{6} \\
 12 \\
 \underline{6} \\
 0 \\
 \underline{0} \\
 2
 \end{array}$$

∴ $445 = 2021_{(6)}$

Entre bases diferentes de la decimal

234₍₉₎ al sistema de base octal (base 8)

De base 9 al decimal:

$$\begin{aligned}
 234_{(9)} &= 2 \times 9^2 + 3 \times 9 + 4 \\
 &= 193
 \end{aligned}$$

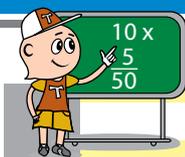
De la decimal a la octal:

$$\begin{array}{r}
 193 \mid 8 \\
 \underline{8} \\
 24 \\
 \underline{8} \\
 0 \\
 \underline{0} \\
 3
 \end{array}$$

$$234_{(9)} = 193 = 301_{(8)}$$

A mayor base, menor representación:

$$\begin{array}{r}
 - \\
 234_{(9)} = 301_{(8)} \\
 +
 \end{array}$$



Aplica lo comprendido

- Determine los siguientes números en el sistema decimal:
 - $23_{(5)} =$
 - $121_{(4)} =$
 - $32_{(7)} =$
 - $213_{(6)} =$
- Escriba los números:
 - 23 en base 8:
 - 14 en base 7:
 - 15 en base 6:
 - 30 en base 9:
- Escriba los números:
 - 30 en base 7
 - 21 en base 6
 - $24_{(6)}$ en base 10
 - $25_{(9)}$ en base 10
- ¿Cómo se escribe $213_{(5)}$ en el sistema decimal?
- El número $101101_{(2)}$ al ser escrito en el sistema decimal es:



Aprende más

- Determina "a + b + c", si: $234 = \overline{abc}_{(7)}$.
 - Hallar "m + n + p + q", si: $61 = \overline{mnpq}_{(3)}$.
 - Sean los números: $\overline{2a31}_{(n)} = \overline{4b5}_{(m)}$, complete la relación de orden correcta (">" o "<"):
- | Columna 1 | Respuesta | Columna 2 |
|-----------|-----------|-----------|
| a | | n |
| m | | b |
| n | | m |
- Si los números están correctamente escritos: $\overline{b3c}_{(7)}$; $\overline{1b3}_{(c)}$ y $142_{(b)}$, hallar "2b + c".
 - Hallar "a", si se cumple: $\overline{2a2a}_{(7)} = 1\ 000$
 - Determinar "a", si: $\overline{a64} = \overline{a0a4}_{(5)}$
 - Sabiendo que: $\overline{ab3}_{(4)} = \overline{ba4}_{(5)}$, hallar "a + b"
 - Cumpliendo que: $\overline{3ab}_{(5)} = \overline{ba1}_{(6)}$, hallar "a + b"
 - Si se cumple que: $\overline{3a(2b)}_{(6)} = \overline{b0ba}_{(5)}$, hallar "a + b"
 - Calcular el valor de "a", si se sabe que: $334_{(a)} = 1142_{(5)}$.
 - Sabiendo que: $4210_{(n)} = \overline{nnn}$, determinar el valor de "n".
 - Sabiendo que: $\overline{a0b}_{(11)} = \overline{b0a}_{(13)}$, hallar "a + b"
 - Sabiendo que: $\overline{aaa}_{(7)} = \overline{bc1}$, hallar "a + b + c"
 - Hallar "m", si: $\overline{\alpha 2\alpha}_{(12)} = \overline{1m7m}$
 - Calcular "a", si: $\overline{aa3a}_{(6)} = \overline{64a}_{(9)}$

Aplicación cotidiana

Indicadores en el panel IBM



El IBM 650 tenía 7 bits: dos para la componente binaria (pesos 0 5) y cinco para la componente quinaria (pesos 0 1 2 3 4). En la foto se pueden observar estos indicadores: hay 16 de ellos, cada uno con una columna de 5 luces, con las otras dos arriba a los lados.

Valor	bits 05-01234
0	10-10000
1	10-01000
2	10-00100
3	10-00010
4	10-00001
5	01-10000
6	01-01000
7	
8	01-00010
9	

- ¿Cómo se representa el número 7 en el sistema biquinario?
- Determina la representación del número 9 en el sistema biquinario.



¡Tú puedes!

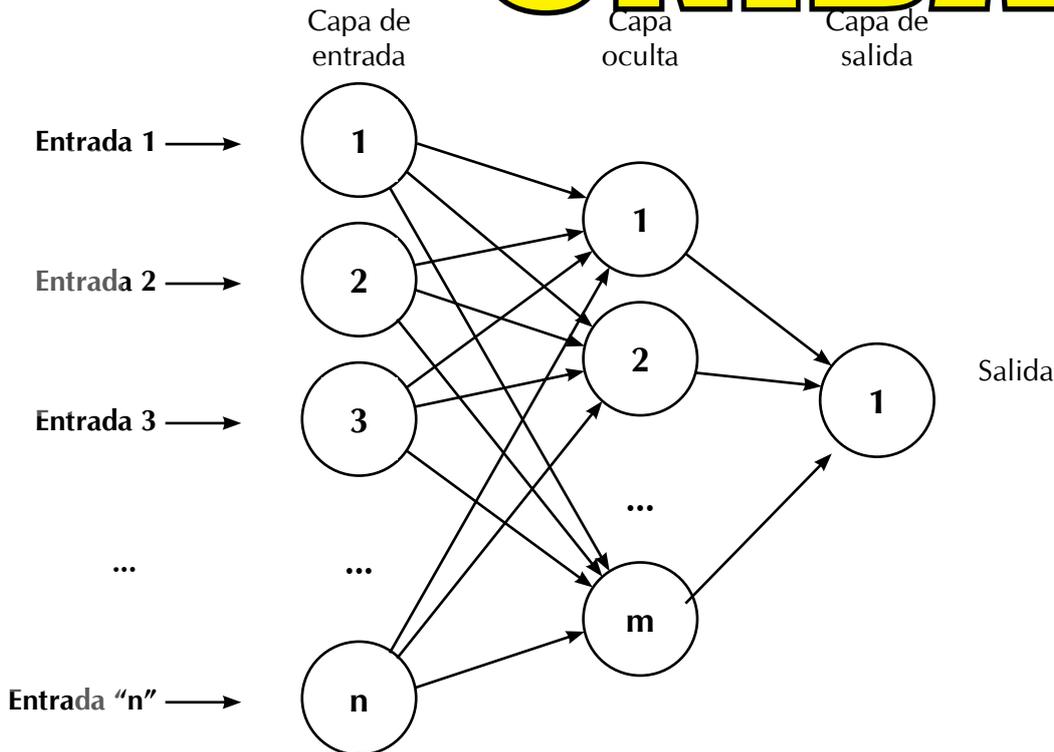
- Representar $\underbrace{1010 \dots 10}_{10 \text{ cifras}}_{(2)}$ en el sistema cuaternario. ¿Cuál es la suma de sus cifras?
 a) 10 b) 8 c) 12 d) 6 e) 18
- Si el número $135_{(n)}$ se lleva a base "n + 1", la suma de sus cifras es:
 a) 8 b) 9 c) 7 d) 5 e) 6
- Si el número $131_{(n)}$ se lleva a base "n - 1", la suma de sus cifras es:
 a) 11 b) 13 c) 10 d) 9 e) 12
- Si: $\overline{3a}_9 + 63_b + \overline{bb}_a = \overline{(a + 1)(b + 1)}_{a + b}$, dar el valor de "a . b"
 a) 30 b) 56 c) 40 d) 42 e) 72
- Si: $\overline{ac}_b = \overline{cb}_{a + 2}$ y $a + b + c = 24$, expresar \overline{abc} en el sistema hexadecimal.
 a) 3511_{16} b) 372_{16} c) 363_{16} d) 311_{16} e) 381_{16}



Practica en casa

- Determina "a + b + c", si: $343_{(6)} = \overline{abc}$.
- ¿Cómo se escribe $4334_{(5)}$ en el sistema decimal?
- Determina "a + b + c", si: $254 = \overline{abc}_{(8)}$.
- Hallar "m + n + p + q + r + s", si:
 $61 = \overline{mnpqrs}_{(2)}$.
- ¿Cuántas cifras tiene el número $101221_{(4)}$ en el sistema decimal?
- Determinar el valor de "x - y" en la expresión:
 $\overline{2x6}_{12} = \overline{54y}_8$
- El número $22222_{(3)}$, ¿cómo se representa en el sistema nonario? Dar como respuesta la suma de sus cifras
- Hallar "m", si: $\overline{\alpha 2 \alpha}_{(11)} = \overline{1m4m}$.
- ¿Cómo se escribe $\overline{(m - 2)(2m)3}_{(8)}$ en el sistema nonal?
- Hallar "a", si se cumple: $\overline{2a2a}_{(5)} = 338$
- Determinar "a", si: $\overline{70(2a)} = \overline{a0a4}_{(7)}$
- Sabiendo que: $\overline{a(b - 1)3}_{(4)} = \overline{ba0}_{(5)}$, hallar "a + b".
- Cumpléndose que: $\overline{3ab}_{(5)} = \overline{ba1}_{(6)}$, hallar "a + b".
- Hallar "a", si: $\overline{a4a}_{(7)} = \overline{120a}_{(5)}$
- ¿Cuál de las siguientes expresiones dadas en sistemas de numeración distintos representa el número mayor?
 a) $43_{(6)}$ b) $10110_{(2)}$ c) $24_{(9)}$
 d) $212_{(3)}$ e) $102_{(25)}$

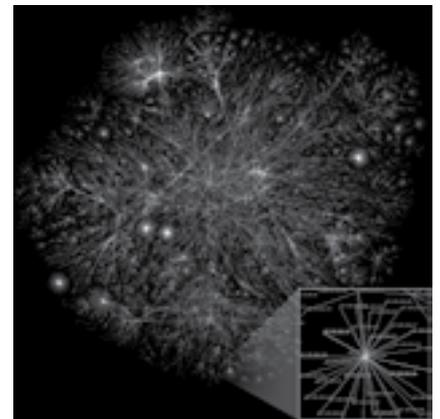
UNIDAD 3



¿Red neuronal artificial?

Las redes de neuronas artificiales (denominadas habitualmente como RNA o en inglés como: "ANN") son un paradigma de aprendizaje y procesamiento automático inspirado en la forma en que funciona el sistema nervioso de los animales. Se trata de un sistema de interconexión de neuronas en una red que colabora para producir un estímulo de salida. En inteligencia artificial es frecuente referirse a ellas como redes de neuronas o redes neuronales.

Una red neuronal se compone de unidades llamadas neuronas. Cada neurona recibe una serie de entradas a través de interconexiones y emite una salida.



Internet como red artificial. Representación.

- ¿Cuántas salidas tendrá la red de la figura que correspondan a la entrada 1?

APRENDIZAJES ESPERADOS



Comunicación matemática

- Identificarán los términos de una sucesión.
- Determinarán los elementos de la progresión aritmética
- Determinarán los valores de las cifras de un número.

Razonamiento y demostración

- Determinarán la fórmula del término enésimo en una P.A.
- Diferenciarán los casos del uso del principio de adición y multiplicación.

Resolución de problemas

- Usarán la fórmula del término enésimo.
- Determinarán los términos de una sucesión
- Determinarán la cantidad de términos de una P.A.
- Usarán el principio de multiplicación de análisis combinatorio.

Conteo de números.

Progresión aritmética

En este capítulo aprenderemos:

- A identificar los términos de una sucesión.
- A determinar los elementos de la progresión aritmética.
- A determinar la fórmula del término enésimo en una P.A.
- A usar la fórmula del término enésimo.
- A determinar los términos de una sucesión.

¿Qué mes del año se llamaba sextilis?

lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
26	27	28	29	30	31	1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12

El mes Quintilis, fue renombrado a Julio en honor de Julio César (nació en ese mes). Después del asesinato de Julio César, su hijo adoptivo Augusto tomó el poder. El senado romano honró a Augusto cambiando el nombre de Sextilis por Augusto que tenía 30 días. Cuando Augusto se dio cuenta de eso, mandó quitar un día del mes de febrero para ponérselo en agosto, no podía aceptar que su mes tuviera menos días que él de su padre.

- Si escribes las fechas de los días lunes de cada mes, ¿cuál es la razón de la progresión que se forma?
- Si escribes las fechas del primer domingo, siguiente sábado, siguiente viernes, siguiente jueves y así sucesivamente, ¿qué tipo de progresión se forma?

Saberes previos

Completa con números:

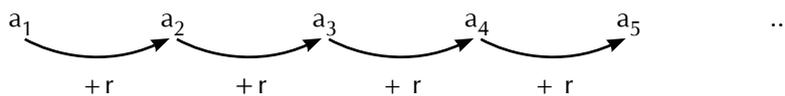
Mayor # de tres cifras diferentes			Para $n = 10$ en $n^3 + n^2 + 1$		Cuadrado de 7	
85 ₍₁₁₎			Cifras iguales		Para $n = 20$ en $n^2 + 2n - 5$	
		J en cartas				
		Primeros # primos				
3; 8; 13; 18; 23; ...					2; 6; 12; 20; ...	
6 docenas					4; 9; 16; 25; ...	
	Máximo # en el dado					Capicúa
	Capicúa					Mayor # primo de una cifra
	Para: $n = 15$ en $2n^2 + 65$					Un término de 12; 23; 34; ...
	Cubo de 7					100 ₍₁₃₎
Para: $n = 4$ $t_n = 3n + 4$ es			32 ₍₇₎			As
2; 9; 16; 23; 30; ...			Tres quincenas			Un día (en horas)
		Cuadrado de 7			32 ₍₈₎	
		Media docena			Dos docenas	
3/4 de año (mes)				15 al cuadrado		
Año común				Primeros cuadrados perfectos		

Conceptos básicos

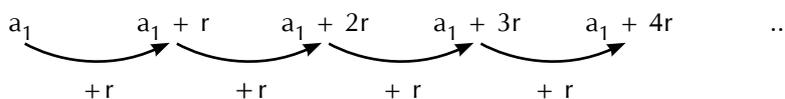
Progresión aritmética

En esta sucesión la diferencia de dos términos consecutivos es constante

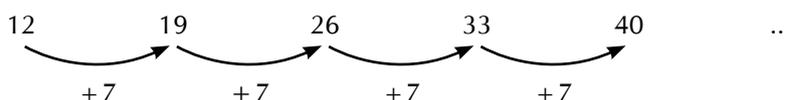
- $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = r$ (Razón de la P.A.)



También se puede expresar como:

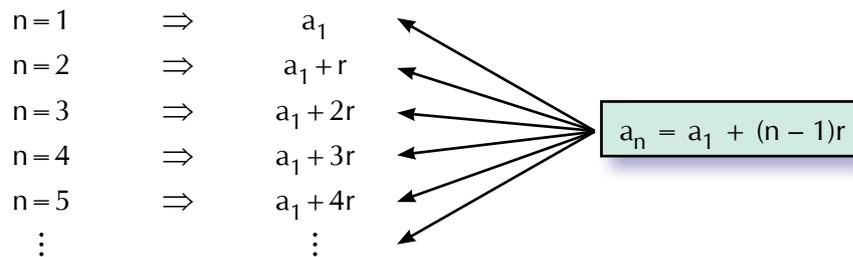


➔ Ejemplo:



Término enésimo de la progresión aritmética

De la progresión:



➔ Ejemplos:

- Para la P.A: 9; 13; 17; 21; ...

La razón es: $r = 13 - 9 = 17 - 13 = \dots = 4$

El primer término es: 9

Luego el término enésimo es: $a_n = 9 + (n - 1)(4) = 4n + 5$

- Calcular el vigésimo término de la progresión aritmética: 7; 12; 17; 22; ...

La razón es: $r = 12 - 7 = 5$

El primer término es: 7

Entonces: $a_n = 7 + (n - 1)(5) = 5n + 2$

Y el vigésimo término es: $a_{20} = 5(20) + 2 = 102$

Recuerda que la diferencia de dos términos seguidos es constante, dicha diferencia es la razón. También la fórmula que permite determinar el término enésimo es:

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

Cantidad de términos

Conociendo el primer término, la razón y el último término, se puede determinar la cantidad de términos o números que forman la progresión aritmética. Como la fórmula del término enésimo es $a_n = a_1 + (n - 1)r$, despejemos "n":

$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$

➔ Ejemplo:

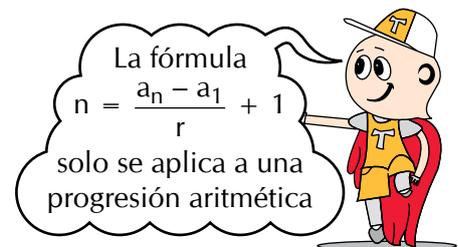
- ¿Cuántos términos tiene la sucesión: 5; 8; 11; 14; 17; ...; 32?

Como la razón es: $r = 8 - 5 = 3$

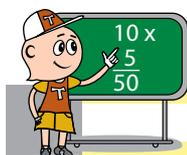
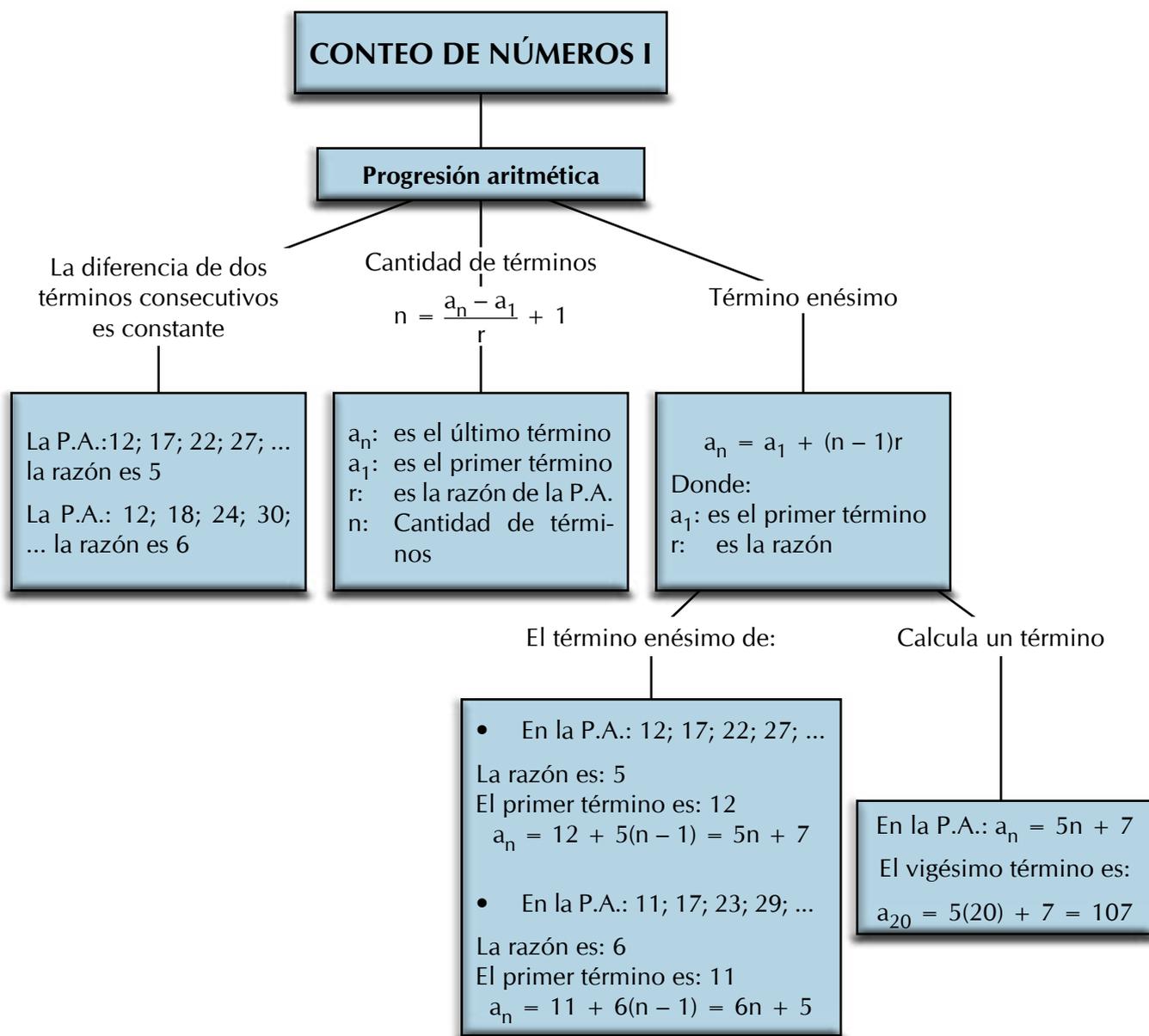
El primer término = 5

El último = 32

→ La cantidad de términos es: $n = \frac{32 - 5}{3} + 1 = 10$



Síntesis teórica



Aplica lo comprendido

1. Calcular la razón en cada una de las progresiones aritméticas:
 - 12; 16; 20; 24; ... $r = \dots\dots\dots$
 - 23; 29; 35; 41; ... $r = \dots\dots\dots$
 - 15; 22; 29; 36; ... $r = \dots\dots\dots$
2. Si el primer lunes de un mes es día 4, ¿cuáles serán las fechas de los demás lunes del mismo mes?
3. Determina "a + b", si: \overline{ab} ; 23; ...; 65; 72; ... son los términos de una progresión aritmética.
4. Calcula " $m + n + p$ ", si los números: $15; \overline{mn}; \overline{np}; 39; \dots$ son términos de una progresión aritmética.
5. Hallar el número de términos de las siguientes P.A.:
 - 2; 7; 12; 17; ...; 97
 - 4; 8; 12; 16; ...; 120



Aprende más

- Relaciona correctamente:
 - 2; 5; 8; ... () La razón es 4
 - 5; 9; 13; ... () El cuarto término es 20
 - 2; 6; 12; ... () El quinto término es 14
- Calcular el término " a_{41} " en la P.A.:
30; 37; 44; 51; ...
- Calcular el término vigésimo de la progresión aritmética:
96; 93; 90; 87; ...
- Determina la razón de la siguiente progresión aritmética:
 $42_{(6)}$; $51_{(6)}$; $100_{(6)}$; ...
- Determina la razón de la siguiente progresión aritmética:
 $23_{(5)}$; $32_{(5)}$; $41_{(5)}$; ...
- En una progresión aritmética, el tercer término es 13 y el séptimo es 37. ¿Cuál es la razón de la progresión?
- Si 22 y 43 son el tercer y sexto término de una progresión aritmética, ¿cuál es el primer término de la progresión?
- La suma y diferencia de los dos primeros términos de una progresión aritmética es 31 y 7. ¿Cuál es el valor del quinto término?
- Indicar el décimo quinto término de la siguiente progresión aritmética:
 $(n + 6)$; $(2n + 7)$; $4n$; ...
- Calcula "n" para que los números:
 $10_{(n)}$; $100_{(n)}$; $150_{(n)}$;
formen una progresión aritmética.
- El primer y segundo término de una progresión aritmética es \overline{aa} y $\overline{b2}$. Si la razón es "a", ¿qué valor tiene "a + b", si "a" y "b" son diferentes?
- Hallar "a + b + c + d", en la siguiente progresión aritmética:
 \overline{ab} ; 23; \overline{cd} ; 37; ...

Aplicación cotidiana

Años bisiestos

Un año es año bisiesto si dura 366 días, en vez de los 365 de un año común. Ese día adicional se añade en el mes más corto, fechándose como 29 de febrero. Este día se añade para corregir el desfase que existe con la duración real de los años: 365 días y 5 horas y 18 minutos aproximadamente. Esto hace que se corrija cada cuatro años. Un año es bisiesto si es divisible por 4, excepto el último de cada siglo (aquel divisible entre 100), salvo que este último sea divisible por 400.

- Determina los cuatro primeros años bisiestos posteriores al último año bisiesto.
- ¿Cuántos años bisiestos hubo entre el año 1890 y 1915?
- ¿Cuántos años bisiestos habrán entre el año 2010 y el 2110?



¡Tú puedes!

- Hallar "a + b" en la siguiente progresión aritmética: $\overline{a8b}$; $\overline{a93}$; $\overline{b04}$; $\overline{ba5}$; ...
 - 6
 - 7
 - 3
 - 4
 - 5
- Hallar "a + b + c + d + e + f", en la siguiente progresión aritmética: $\overline{8a}$; \overline{bc} ; \overline{aa} ; \overline{def} ; ...
 - 16
 - 27
 - 23
 - 24
 - 15

3. La diferencia entre el quinto y segundo término de una progresión aritmética es 33. Halle la diferencia entre el término de lugar 23 y el de lugar 25.
 a) 22 b) 33 c) 44 d) 66 e) 88
4. Calcular "a + b + n", en la siguiente progresión aritmética: $\overline{a3}_{(n)}$; $\overline{a5}_{(n)}$; $\overline{(a + 1)1}_{(n)}$; $\overline{4b}_{(n)}$; ...
 a) 12 b) 15 c) 17 d) 18 e) 19
5. ¿Cuántos términos tiene la siguiente progresión aritmética?
 $12_{(n)}$; $17_{(n)}$; $24_{(n)}$; $31_{(n)}$; ...; $620_{(n)}$
 a) 73 b) 75 c) 77 d) 79 e) 81



Practica en casa

1. Relaciona correctamente:
 A. 2; 5; 8; ... () El quinto término es 30
 B. 5; 9; 13; ... () El cuarto término es 11
 C. 2; 6; 12; ... () El quinto término es 21
2. Calcular el término "a₃₀" en la P.A.:
 23; 30; 37; 44; 51; ...
3. Calcular el término décimo de la P.A.:
 93; 90; 87;
4. Hallar "a - b + c - d" si los números:
 \overline{aa} ; $\overline{b3}$; $\overline{(a + 1)8}$; $\overline{c0d}$; ...
 forman una progresión aritmética.
5. En una progresión aritmética, el tercer término es 3 y el séptimo es 35. ¿Cuál es la razón de la progresión?
6. Si 12 y 63 son el tercer y sexto término de una progresión aritmética, ¿cuál es el primer término?
7. La suma y diferencia de los dos primeros términos de una progresión aritmética es 17 y 5. ¿Cuál es el valor del quinto término?
8. Indicar el vigésimo quinto término de la siguiente progresión aritmética:
 (n + 6); (2n + 7); 4n; ...
9. Hallar la razón para que los números:
 $10_{(n)}$; $100_{(n)}$; $150_{(n)}$; ...
 formen una progresión aritmética
10. El primer y segundo término de una progresión aritmética es \overline{aa} y $\overline{b4}$. Si la razón es "a", ¿qué valor tiene "a + b", si "a" y "b" son diferentes?
11. Hallar la razón en la siguiente progresión aritmética:
 \overline{ab} ; 23; \overline{cd} ; 37; ...
12. El tercer término de una P.A. es 12 y el décimo primer término es -12. Hallar la razón.
13. Hallar el número de términos en:
 • 18; 21; 24; ...; 72
 • 120; 118; 116; ...; -100
14. En la P.A.: 5; 12; 19; ...; 110, hallar: a₁₂ + a₁₃
15. Escribir los 10 términos siguientes en base 6:
 P.A.: $12_{(6)}$; $15_{(6)}$; $22_{(6)}$; ...

Conteo de números. Paginación

En este capítulo aprenderemos:

- A determinar los valores de las cifras de un número.
- A determinar la fórmula para calcular la cantidad de cifras en una sucesión natural.
- A determinar la cantidad de cifras en una progresión aritmética.

La avenida Arequipa

La avenida Arequipa es una de las principales avenidas de la ciudad de Lima, capital del Perú. En su recorrido de 52 cuadras de norte a sur, partiendo de Santa Beatriz en el Cercado de Lima, une los distritos de Lince, San Isidro y Miraflores.

En 1955 se construyó uno de los primeros pasos a desnivel en Lima, el puente Eduardo Villarán Freyre. Este puente nombrado en honor a un alcalde del distrito de San Isidro, se ubica en el cruce con la avenida Javier Prado, arteria a la que divide en sus dos grandes segmentos: Javier Prado Este y Javier Prado Oeste.



- Si la primera cuadra se inicia con la numeración 100 y aproximadamente hay 50 casas en cada cuadra, ¿cuántas cifras se requiere para la numeración de las casas de toda la avenida?

Saberes previos

Completa con números:

¿Cuántos # hay en: 2; 5; 8; 11; ...; 38?		La razón de 16; 19; 22; ...		Cubo de 6	El 8vo. término de 14; 17; 20; ...
		Máximo en el dado		Primer primo	
	El "t ₈ " en 8; 13; 18; 23; ...			# primo	
				Agosto (días)	
Decena y media		Cuadrado perfecto	0; 12; 24; ...		
La razón de 12; 37; 62; ...		Mínimo "n" en 635 _(n)	Año común		
	2001 ₍₅₎	Máxima cifra en base senaria			Único primo par
	La razón de 5; 9; 13; ...	Cuadrado de 21			Múltiplo de 9
Un día (en horas)		Mes de julio (días)		1; 8; 27; ...	
Cubo de 6		Menor base		El "t ₆ " de 4; 9; 16; 25; ...	
	132 ₍₅₎		4 decenas		n(n+1) = 1806
	"t ₆ " de 4; 6; 10; 16; ...		Media centena		Mayor cifra
		Está entre 100 y 200			
		Una mano			
		"t ₇ " de 10; 16; 22; 28; ...			3 ² + 30 ²
		Menor # capicúa de 4 cifras			Una centena

Conceptos básicos

Cantidad de cifras

a) Para determinar la cantidad de cifras que se utilizan al escribir una sucesión, debemos agrupar los términos por la cantidad de sus cifras.

➔ Ejemplos:

- ¿Cuántas cifras se utilizan al escribir los términos de la sucesión: 2; 5; 8; ...; 20?

$$\begin{array}{ccccccc}
 2; & 5; & 8; & 11; & 14; & 17; & 20 \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 3 \text{ números} & & & & 4 \text{ números} & & \\
 \underbrace{\hspace{3.5cm}} & & & & \underbrace{\hspace{3.5cm}} & & \\
 3(1) + 4(2) = 11 \text{ cifras} & & & & & &
 \end{array}$$



- ¿Cuántas cifras se utilizan al escribir los términos de la sucesión: 1; 5; 9; ...; 61?

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{1; \quad 5; \quad 9; \quad \underbrace{13; \quad 17; \quad \dots; \quad \dots; \quad 61}}_{3 \text{ números}} \quad \underbrace{\frac{61 - 13}{4} + 1 = 13 \text{ números}} \\
 \hline
 3(1) + 13(2) = 29 \text{ cifras}
 \end{array}$$

- ¿Cuántas cifras se utilizan al escribir los términos de la sucesión: 1; 3; 5; ...; 141?

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{1; \quad 3; \quad 5; \quad 7; \quad 9; \quad \underbrace{11; \quad 13; \quad \dots \quad \dots; \quad 99; \quad \underbrace{101; \quad 103; \quad \dots; \quad \dots; \quad 141}}_{5 \text{ números}} \quad \underbrace{\frac{99 - 11}{2} + 1 = 45 \text{ números}} \quad \underbrace{\frac{141 - 101}{2} + 1 = 21 \text{ números}} \\
 \hline
 5(1) + 45(2) + 21(3) = 158 \text{ cifras}
 \end{array}$$

b) Cuando la sucesión es de números naturales, podemos analizar como los casos anteriores, pero también existe una forma práctica:

- Cuando el último número es de tres cifras:

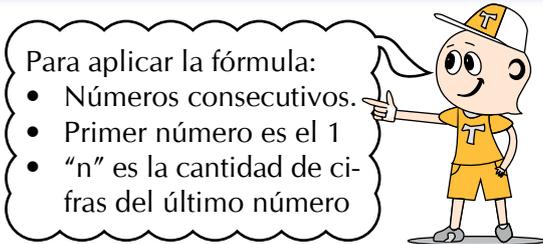
$$\begin{array}{c}
 \underbrace{1; \quad 2; \quad 3; \quad \dots; \quad \dots; \quad \overline{abc}}_{\text{Son } \overline{abc} \text{ números}} \\
 3(\overline{abc} + 1) - 111 \text{ cifras}
 \end{array}$$



- Cuando el último número es de cuatro cifras:

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{1; \quad 2; \quad 3; \quad \dots; \quad \dots; \quad \overline{abcd}}_{\text{Son } \overline{abcd} \text{ números}} \\
 4(\overline{abcd} + 1) - 1111 \text{ cifras}
 \end{array}$$

Esta fórmula podemos generalizarla, cuando el último número "A" sea de "n" cifras:

$$n(A + 1) - \underbrace{(111 \dots 1)}_{\text{"n" cifras}}$$


- Para aplicar la fórmula:
- Números consecutivos.
 - Primer número es el 1
 - "n" es la cantidad de cifras del último número

Síntesis teórica

CONTEO DE NÚMEROS II

Cantidad de cifras

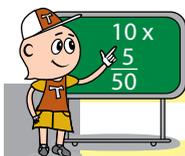
Agrupar los números por cantidad de cifras

• ¿Cuántas cifras hay?
 13; 18; 23; 28; 33; ...; 233
 Los números de dos cifras:
 13; 18; 23; ...; 98
 son: $\frac{98 - 13}{5} + 1 = 18 \rightarrow 18(2) = 36$ cifras
 Los números de tres cifras:
 103; 108; 113; ...; 233
 son: $\frac{233 - 103}{5} + 1 = 27 \rightarrow 27(3) = 81$ cifras
 Total de cifras: $36 + 81 = 117$

Para la serie de los números naturales

Cantidad de cifras para escribir:

1; 2; 3; ...; $\overline{abc} \Rightarrow 3(\overline{abc} + 1) - 111$ cifras
 1; 2; 3; ...; $\overline{abcd} \Rightarrow 4(\overline{abcd} + 1) - 1111$ cifras



Aplica lo comprendido

- Si un libro tiene 51 hojas, ¿cuántas páginas tiene?
- Para escribir los ocho primeros números primos, ¿cuántas cifras se utilizan?
- Determina la cantidad de cifras que has utilizado para escribir todos los términos de la sucesión:
7; 12; 17; 22; ...; 67
- Para numerar las primeras 100 páginas de un libro, ¿cuántas cifras se utilizarán?
- ¿Cuántas cifras se utilizan al escribir los términos de la serie?
2; 4; 6; 8; ; 40



Aprende más

- Determina la cantidad de cifras que se utilizan al escribir los términos de la sucesión: $7; 12; 17; 22; \dots; 92$.
- La numeración de los boletos de una rifa es: $001; 002; 003; \dots; \overline{abc}$, ¿cuántos ceros inútiles se han usado?
- Para escribir los números: $1; 3; 5; 7; \dots; 345$. ¿Cuántas cifras se utilizan?
- Determinar cuántos tipos de imprenta se utilizaron en la numeración de un libro de 114 páginas.
- ¿Cuántas cifras se utilizan al escribir los números: $24_{(7)}; 26_{(7)}; 31_{(7)}; \dots; 55_{(7)}$? (Considere también escribir las bases).
- Un libro tiene 47 hojas. Si numeramos sus páginas, ¿cuántas cifras se requieren?
- ¿Cuántos ceros inútiles se utilizan al escribir la serie: $0001; 0002; 0003; \dots; 0999$?
- Al escribir la serie natural: $45; 46; 47; \dots; 243$, ¿cuántas cifras se utilizan?
- Para escribir los números: $12; 13; 14; 15; \dots; \overline{abc}$ se han utilizado 200 cifras. Hallar " $a + b + c$ ".
- Para numerar las páginas de un libro, se han utilizado 450 tipos de imprenta. ¿Cuántas páginas tiene el libro?
- Un libro tiene 400 páginas. Si solo se numeran las páginas pares, ¿cuántos tipos de imprenta se utilizaron?
- Se escribe la serie: $1; 2; 3; \dots; \overline{abc}$. Si se han usado 1 266 cifras, dar como respuesta la cifra de mayor orden de \overline{abc} .
- ¿Cuántos términos tiene la siguiente progresión aritmética?
 $12_{(n)}; 17_{(n)}; 24_{(n)}; 31_{(n)}; \dots; 620_{(n)}$
- Un libro tiene 300 páginas y se decide editarlo en tres tomos iguales. ¿Cuántos tipos de imprenta se ahorran en la numeración de sus páginas?
- ¿Cuántas hojas tiene un libro tal que al escribir la numeración de sus páginas se han utilizado 600 tipos de imprenta?

Aplicación cotidiana

El bingo ganador



Las reglas son sencillas. El bingo es el de 75 bolas. Estas se extraen de una bombona que suele tener la capacidad de girar para revolver las bolas, cada una con un número distinto.

La tarjeta suele tener 25 espacios, ordenados en una matriz de 5 por 5 y el espacio central no tiene número.

El objetivo es que a medida que van saliendo los números, se debe ir llenando la tarjeta, el primero en llenar es el ganador.

- ¿Cuántas cifras se utilizan en la numeración de las bolas?
- ¿Cuántas cifras como máximo habrá en una tarjeta?
- ¿Cuántas cifras como mínimo tendrá una tarjeta?



¡Tú puedes!

- Lourdes escribe todos los números de dos cifras, pero se olvida de todos los números que terminan en 2 y 7. ¿Cuántas cifras habrá utilizado?
 a) 72 b) 162 c) 142 d) 144 e) 180
- ¿Cuántas cifras se utilizan al escribir los términos de la sucesión: 11^{13} ; 12^{14} ; 13^{15} ; ...; 120^{122} ?
 a) 460 b) 483 c) 456 d) 484 e) 450
- Indica la cantidad de cifras que se utilizan al escribir todos los términos de la siguiente progresión aritmética: \overline{ab} ; 85 ; $\overline{c2}$; \overline{cc} ; ...; $\overline{ab5}$.
 a) 300 b) 301 c) 302 d) 303 e) 304
- ¿Cuántas páginas tiene un libro, si en la numeración de las 24 últimas páginas se han usado 69 cifras?
 a) 60 b) 80 c) 215 d) 64 e) 120
- ¿Cuántas cifras se utilizan al escribir los términos de la sucesión aritmética: $\overline{8a}$; \overline{bc} ; \overline{aa} ; \overline{def} ; ...; \overline{fff} ?
 a) 214 b) 228 c) 216 d) 226 e) 213



Practica en casa

- Determina la cantidad de cifras que se utilizan al escribir los términos de la sucesión: 7 ; 12 ; 17 ; 22 ; ...; 122 .
- La numeración de los boletos de una rifa es: 001 ; 002 ; 003 ; ...; 999 .
¿Cuántos ceros inútiles se han usado?
- Para escribir los números: 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; ...; 340 ¿cuántas cifras se utilizan?
- Determinar cuántos tipos de imprenta se utilizaron en la numeración de un libro de 214 páginas.
- ¿Cuántas cifras se utilizan al escribir los números $24_{(8)}$; $26_{(8)}$; $30_{(8)}$; ...; $70_{(8)}$?
(considere también escribir las bases)
- Un libro tiene 87 hojas. Si numeramos sus páginas, ¿cuántas cifras se requieren?
- ¿Cuántos números pares tienen dos cifras cuando se expresan en el sistema octal?
- En escribir la serie natural: 45 ; 46 ; 47 ; ...; 143 , ¿cuántas cifras se utilizan?
- Para escribir los números: 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; ...; \overline{abc} se han utilizado 362 cifras. Hallar " $a + b + c$ ".
- Para numerar las páginas de un libro, se han utilizado 480 tipos de imprenta. ¿Cuántas páginas tiene el libro?
- Un libro tiene 420 páginas y se decide editarlo en tres tomos iguales, ¿cuántos tipos de imprenta se ahorran en la numeración de sus páginas?
- ¿Cuántas hojas tiene un libro tal que al escribir la numeración de sus páginas, se han utilizado 450 tipos de imprenta?
- Un libro tiene 400 páginas. Si solo se numeran las páginas impares, ¿cuántos tipos de imprenta se utilizan?
- Determinar la cantidad de cifras que se utilizan al escribir la serie natural desde el 15 hasta el 328.
- Se escribe la serie: 1 ; 2 ; 3 ; ...; \overline{abc} .
Si se han usado 1 386 cifras, dar como respuesta la cifra de mayor orden de \overline{abc} .

Complemento



Aprende más

- Hallar la razón de la progresión aritmética: $\overline{a1}$; \overline{mn} ; \overline{xy} ; $\overline{a7}$; ...
- Calcular la suma de las cifras del numeral, al convertir 1 024 al sistema heptal.
- Hallar el valor de "x - y" en la expresión: $\overline{2x6}_{(12)} = \overline{54y}_{(8)}$.
- Hallar "a", si: $\overline{1a9} = \overline{a01}_{(8)}$.
- Calcular "m + n", si: $\overline{a1}$; \overline{mn} ; $\overline{a7}$; $\overline{x00}$; ... es una progresión aritmética.
- Si: $\overline{(n-1)n(n+1)}_{(8)} = 311_{(11)}$, calcular "n".
- Si: $\overline{xyz}_{(9)} = 90$, hallar "x + y + z".
- Calcular "a + b + c", en: $\overline{a0}_{(b)}$; $31_{(a)}$; $\overline{1b}_{(c)}$; $\overline{c3}_{(7)}$.
- Calcular "x . y", en: $\overline{1xy4}_{(r)} = \overline{r31}_{(6)}$
- Si se cumple que: $246_{(n)} = \overline{11\alpha}_{(12)}$, hallar "n".
- Hallar "a + b", si: $\overline{3a8}_{(12)} = \overline{73b}_{(8)}$
- Calcular el vigésimo quinto término de la progresión aritmética: 10; 24; 44; 70; 102; ...
- Calcular la suma del décimo y vigésimo término de la progresión aritmética: 8; 14; 22; 32;
- ¿Cuántos números impares hay entre $312_{(4)}$ y $312_{(7)}$?
- El tercer término de una progresión aritmética es 12 y el décimo primer término es -12. Hallar la razón.

¡Tú puedes!



- En la siguiente progresión aritmética, calcular el término de lugar 29
 $\overline{1a}_{(7)}$; $\overline{1(2a)}_{(7)}$; $\overline{(a-1)(a-1)}_{(7)}$; ...
 a) 84 b) 87 c) 91 d) 94 e) 97
- ¿Cuántos números de tres cifras del sistema nonario existen, tales que su cifra de tercer orden es la suma de sus cifras de primer y segundo orden?
 a) 44 b) 64 c) 72 d) 18 e) 10
- ¿Cuántos números de tres cifras, en base 7, no tienen la cifra 2 en su escritura?
 a) 194 b) 182 c) 167 d) 168 e) 161
- ¿Cuántos números de tres cifras de la base 6, tienen cuatro cifras en base 4?
 a) 313 b) 151 c) 179 d) 152 e) 180
- Se desea pesar 1 642 g de azúcar, utilizando una balanza de dos platillos y pesas de 1 g, 7 g, 49 g, 343 g, ..., etc; y se dispone de 6 pesas de cada tipo. ¿Cuál es el mínimo número de pesas a utilizar?
 a) 10 b) 12 c) 16 d) 20 e) 24



Practica en casa

1. Hallar la razón de la progresión aritmética:
 $\overline{a1}$; \overline{mn} ; $\overline{a7}$; ...
2. Calcular la suma de las cifras del numeral, al convertir 2 014 al sistema senario.
3. ¿Cuántas cifras tiene $101101101_{(2)}$, cuando se representa en el sistema ternario?
4. Un número se representa como 455 y 354 en dos bases consecutivas. Hallar dicho número en base decimal.
5. Si: $54_{(n+1)} = 49$, calcular "n"
6. Hallar "a", si: $\overline{(a+2)(a-1)}_{a(7)} = 319$
7. Hallar "a . b . c", si: $2233_{(4)} = \overline{abc}_{(6)}$
8. Si: $12_{(12)(n)} = 11$, hallar "n".
9. Si el número: $\overline{a(b+3)(b-2)\left(\frac{a}{2}\right)(2b-1)(2a+1)}_{(6)}$ está bien escrito, hallar "a + b".
10. Si: $\overline{(n+1)(n^3)(n-2)}_{(9)} = \overline{abc}$
hallar "a + b + c".
11. ¿Cuántos números pares hay entre 31 y 128?
12. ¿Cuántos números que son múltiplos de 4 hay entre 10 y 116?
13. En la siguiente P.A.:
 $(x-6)$; $(x-1)$; $(x+4)$; $(x+9)$; ...
hay 37 términos. Hallar el último.
14. Si se sabe que "a"; "a²" y "3a" son los tres primeros términos de una progresión aritmética, entonces, hallar la suma de los cinco primeros términos.
15. Sea: $(x+y)$; $(4x-3y)$; $(5y+3x)$ los tres primeros términos de una progresión aritmética. ¿Qué relación hay entre "x" e "y"?

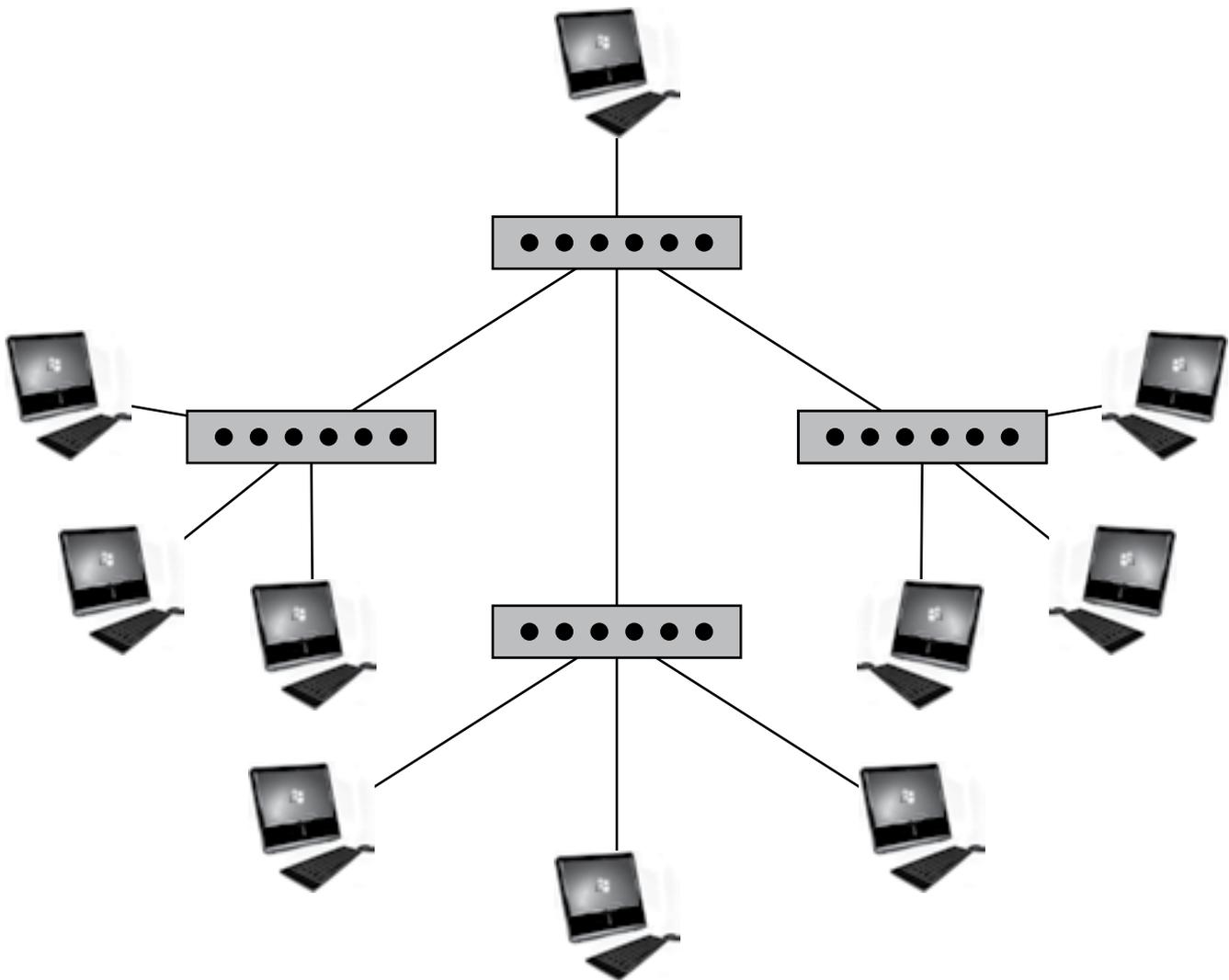
Método combinatorio

En este capítulo aprenderemos:

- A determinar los valores de las cifras de un número.
- A diferenciar los casos del uso del principio de adición y multiplicación.
- A usar el principio de multiplicación de análisis combinatorio.

Interconexión en una oficina

Una red de computadoras, también llamada red de ordenadores o red informática, es un conjunto de equipos (computadoras y/o dispositivos) conectados por medio de cables, señales, ondas o cualquier otro método de transporte de datos, que comparten información (archivos), recursos (CD-ROM, impresoras, etc.), servicios (acceso a internet, e-mail, chat, juegos), etc. incrementando la eficiencia y productividad de las personas. Aquí se muestra una red de árbol



- Indica una ventaja de este tipo de red.
- Indica una desventaja de esta red.

Saberes previos

Completa con números:

55 ₍₈₎ en base 10			Cifras máximas en base 9			Mayor # octal de cuatro cifras diferentes
33 en base 8 es:			Máx. cifra en base 7			
		1/2 decena		$1 + 2 \times 3$	Potencia de 2	
		Un día (... horas)		Múltiplo de 11	Número primo	
	Factorial de 4	Menor # de cuatro cifras diferentes			Máximo # en el dado	
	As				Potencia de 2	
Cifras en base 6						
MCII						
↳				Potencia de 8		
				Múltiplo de 7		
Duodecimal			Mayor # de tres cifras en base 3			Cuadrado de 4
Primo par			Máx. cifra en base 4			Máx. cifra en base 3
	CX				Múltiplo de 41	
	Mayor # de tres cifras en base cuatro				Menor base	

Conceptos básicos

Principios fundamentales

De adición

Cuando se debe escoger entre dos actividades, la cantidad de formas es la suma de cada una de ellas.

A: "m" formas	B: "n" formas
A o B (escoger una de ellas): "m + n"	

→ Ejemplo:

- Carlos desea comprar en la tienda "A" o "B"
 - A: tiene café, té y chocolate
 - B: tiene coca cola, inca cola, pepsi cola y cola inglesa.

¿De cuántas formas puede escoger un producto?

Puede escoger de la tienda "A" (3 productos) o de "B" (4 productos), tendrá para escoger:

$$3 + 4 = 7 \text{ productos}$$

De multiplicación

Cuando se deben escoger dos actividades, la cantidad de formas es el producto de cada una de ellas.

A: "m" formas	B: "n" formas
A y B (escoger ambas): "m . n"	

➔ Ejemplo:

- ¿De cuántas formas se puede vestir Alejandra si tiene para escoger entre:
 - Pantalón: azul, negro, blanco
 - Blusa: rosada, blanca, amarilla, verde?

Debe escoger un pantalón (3 casos) y una blusa (4 casos), entonces se podrá vestir de:

$$3 \times 4 = 12 \text{ formas.}$$

Aplicación aritmética

Lo utilizaremos para determinar la cantidad de números, cuyas cifras tienen características especiales.

➔ Ejemplo:

- ¿Cuántos números de tres cifras empiezan en cifra par y terminan en cifra impar?

Sean los números \overline{abc} donde:

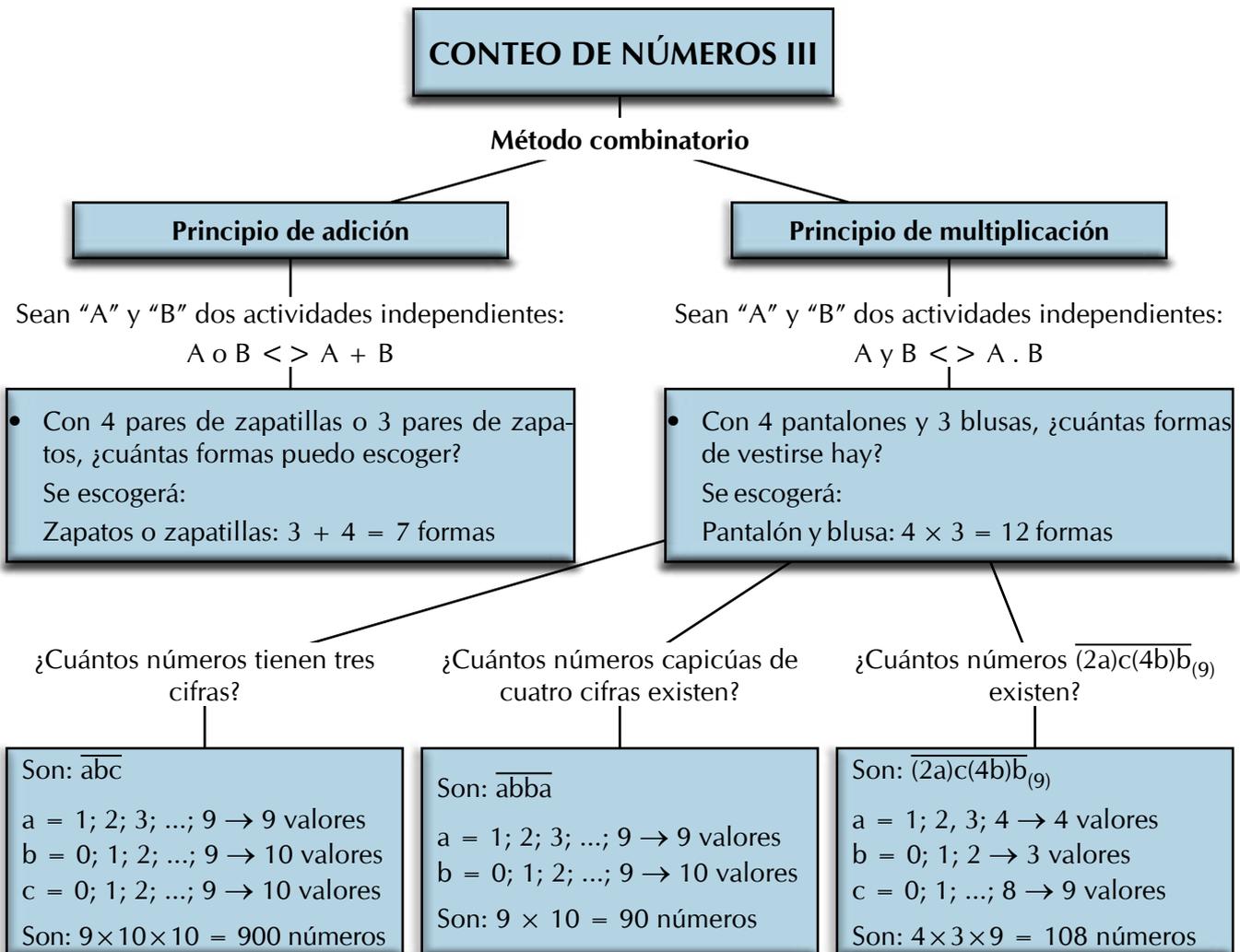
- "a" es par (2; 4; 6; 8)
- "c" es impar (1; 3; 5; 7; 9)
- "b" no tiene condición (0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9)

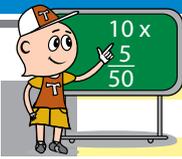
Y como es necesario las tres cifras para formar el número (principio de multiplicación)

a	b	c
Tiene 4 valores	Tiene 10 valores	Tiene 5 valores

La cantidad de números es: $4 \times 10 \times 5 = 200$

Síntesis teórica





Aplica lo comprendido

1. ¿Qué valores tiene "a" para que el número $(2a)(a-1)a$ esté correctamente escrito?
2. Sea el número: $\overline{a(2a)(3b)b}$, entonces los valores de "a" son y los de "b" son
3. ¿Qué valores toma "a" para que el número $(a-1)a(2a)_{(11)}$ esté correctamente escrito?
4. Representa:
 - A un número de tres cifras:
 - A un número de cuatro cifras que empieza en 4 y termina en 7:.....
 - A un número capicúa de cuatro cifras:
5. En el número capicúa $\overline{abba}_{(5)}$, los valores de "a" son y los de "b" son, luego el producto de la cantidad de valores de "a" y "b" es



Aprende más

1. ¿Cuántos números de tres cifras existen en el sistema quinario?
2. ¿Cuántos números capicúas de cuatro cifras existen en el sistema senario?
3. ¿Cuántos números de tres cifras existen, tal que todas sus cifras son pares?
4. De los números pares de tres cifras, ¿en cuántos de ellos sus dos primeras cifras son impares?
5. ¿Cuántos números de la forma: $\overline{a(2a)(3b)b}$ existen?
6. De los números que están comprendidos entre 200 y 500, ¿cuántos son impares?
7. ¿Cuántos números de la forma: $(a+2)(2a)\left(\frac{b}{3}\right)b_{(8)}$ existen?
8. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes existen?
9. De los números capicúas de tres cifras, ¿en cuántos la suma de sus cifras es par?
10. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes existen, tal que las tres cifras sean impares?
11. De los números de tres cifras, ¿en cuántos el producto de sus cifras es cero?
12. ¿Cuántos números de tres cifras tienen solo una cifra tres?
13. ¿Cuántos números de tres cifras existen, tal que el producto de sus cifras es par?
14. En el sistema binario, ¿cuántos números son de nueve cifras y capicúas?
15. Hallar cuántos números de cinco cifras son capicúas.

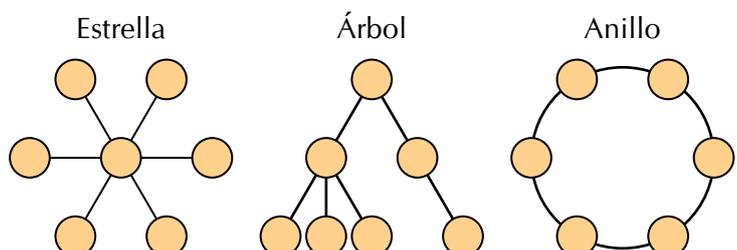
Aplicación cotidiana

Redes informáticas

Una red informática es la conexión de un conjunto de dispositivos electrónicos. Según las necesidades se pueden utilizar diferentes tipos, aquí se muestran algunas:

16. Determina la cantidad de conexiones cuando se escoge la red en forma de estrella.

17. ¿Qué tipo de red utiliza el centro de cómputo?





¡Tú puedes!

- ¿Cuántos números de la forma: $\overline{(a+2)a\left(\frac{b}{3}\right)}_{(6)}$ existen?
 - 16
 - 12
 - 24
 - 20
 - 32
- ¿Cuántos números de la forma: $\overline{(a+2)(a-2)(2b)}_{(7)}$ están correctamente escritos?
 - 18
 - 15
 - 21
 - 12
 - 20
- ¿Cuántos números pares de tres cifras no utilizan al 2 en su escritura?
 - 160
 - 216
 - 256
 - 288
 - 648
- Hallar cuántos números de cuatro cifras tienen por lo menos una cifra par, pero no todas sus cifras pares.
 - 6 500
 - 7 250
 - 7 500
 - 7 825
 - 7 875
- Determinar cuántos números de cinco cifras capicúas impares, tienen por suma de cifras un número par.
 - 125
 - 250
 - 500
 - 150
 - 405



Practica en casa

- ¿Cuántos números de tres cifras existen en el sistema senario?
- ¿Cuántos números capicúas de cinco cifras existen en el sistema senario?
- ¿Cuántos números de tres cifras existen, tal que todas sus cifras son impares?
- ¿Cuántos números capicúas de tres cifras existen en el sistema octal?
- ¿Cuántos números impares de tres cifras existen, tal que sus dos primeras cifras sean pares?
- ¿Cuántos números de tres cifras existen, tal que el producto de sus cifras es cero?
- De los números que están comprendidos entre 200 y 600, ¿cuántos son impares?
- ¿Cuántos números de la forma: $\overline{(a-2)(2a)(4b)}_{(12)}$ existen?
- ¿Cuántos números de la forma: $\overline{(a-2)(2a)\left(\frac{b}{3}\right)}_{(7)}$ existen?
- ¿Cuántos números de cuatro cifras diferentes existen?
- ¿Cuántos números capicúas de tres cifras existen, tal que la suma de sus cifras es impar?
- ¿Cuántos números comprendidos entre 300 y 800 existen?
- De los números de tres cifras, ¿cuántos tienen por lo menos una cifra par?
- ¿Cuántos números de tres cifras tienen solo dos cifras 4?
- ¿Cuántos números de cuatro cifras, tienen al menos una cifra 4 en su escritura?

Repaso



Aprende más



- Dados los números: $4235_{(n)}$ y $\overline{(n-2)35}_{(8)}$, el máximo valor de "n" es y el menor valor de "n" es
- ¿En qué base: $32 + 4 = 40$?
- ¿Cuál es la suma de las cifras del numeral, al convertir 345 al sistema octal?
- En la siguiente progresión aritmética:
24; 27; 30; ...
la razón es, el primer término es, y el quinto término es
- Si los números $\overline{3a}$; 37 ; $\overline{b2}$ son los primeros términos de una progresión aritmética, entonces "a + b" es:
- Determina la cantidad de términos de la progresión aritmética: 21 ; \overline{ab} ; 29 ; ...; $\overline{ab7}$.
- En la progresión aritmética: 1 ; 3 ; 5 ; ...; 19
la cantidad de términos es, de los cuales números son de una cifra y números de dos cifras.
- Para escribir los números 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ...; 45 ¿cuántas cifras se requieren?
- Para que el número: $(a-2)\left(\frac{18}{b}\right)b(2a)$ esté correctamente escrito los valores de "a" son y los de "b" son
- ¿Cuántos números capicúas de cuatro cifras existen en el sistema senario?
- ¿Cuántos números de la forma $\overline{(2a)(a-2)b(3b)}$ son pares?
- Si: $175_{(a)} + \overline{5a7}_{(b)} = \overline{xyb}$, calcular "x + y"
- ¿Cuántos números de la forma $\overline{(2a)b(2b)a}_{(7)}$ existen?
- En la numeración de las páginas de un libro se han utilizado 2 112 cifras, ¿cuántas hojas tiene el libro?
- Calcular "a + b + n", si: $\overline{a72}_{(n)} = \overline{a2b}_{(9)}$



Practica en casa

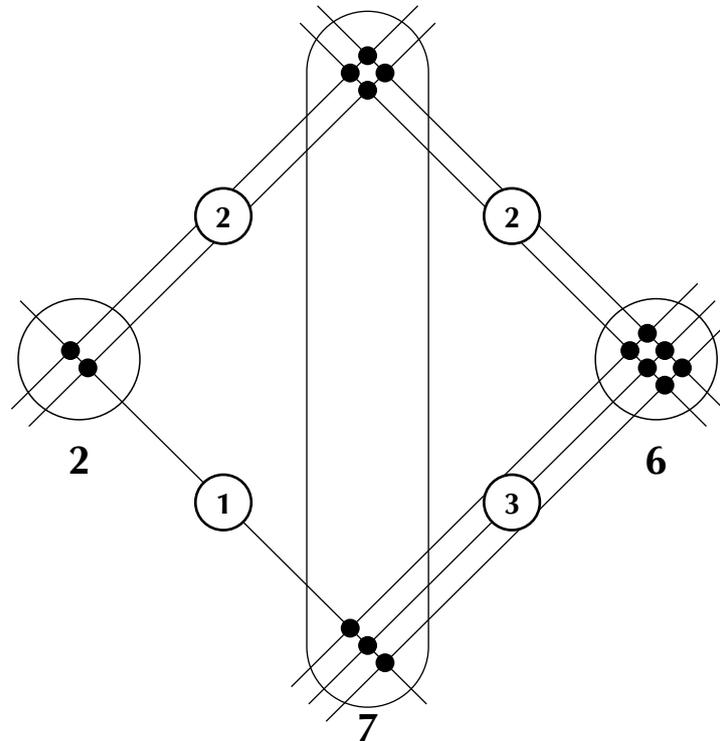


- Dados los números $635_{(n)}$ y $\overline{(n-1)345}_{(9)}$, el máximo valor de "n" es y el menor valor de "n" es
- ¿En qué base: $32 + 5 = 40$?
- ¿Cuál es la suma de las cifras del numeral, al convertir 245 al sistema quinario?
- En la siguiente progresión aritmética:
23; m; 31;
la razón es, el primer término es, y el quinto término es
- Para escribir los números: 1 ; 2 ; 3 ; ...; 99 , ¿cuántas cifras se usarán?
- ¿Cuántos números de tres cifras terminan en 7?
- Determina la cantidad de términos de la progresión aritmética: 21 ; \overline{ab} ; 27 ; ...; $\overline{ab9}$.
- Para escribir los números: 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ...; 75 ¿cuántas cifras se requieren?
- La cantidad de cifras que se utilizan en la numeración de las fechas de los días del mes de junio es:

10. Para que el número: $\overline{(a-1)\left(\frac{12}{b}\right)b(2a)}$ esté correctamente escrito los valores de "a" son y los de "b" son
11. ¿Cuántos números capicúas de cuatro cifras existen en el sistema heptal?
12. ¿Cuántos números de la forma: $\overline{a(a-2)b(3b)}$ son impares?
13. Si se cumple que: $\overline{3a4}_{(6)} = \overline{2b5}_{(7)}$, hallar "a + b"
14. ¿Cuántos números de la forma: $\overline{(2a)b(3b)a}_{(9)}$ existen?
15. En la numeración de las páginas de un libro se han utilizado 2 010 cifras, ¿cuántas hojas tiene el libro?

UNIDAD 4

$$23 \times 12 = 276$$



¿Multiplicando con líneas?

Queremos multiplicar: 23×12 . Dibujamos dos líneas paralelas (izquierda, arriba) y otras 3 (derecha, abajo) paralelas a las primeras correspondientes al número 23. Ahora el segundo número, 12: una línea (izquierda, abajo) y dos (arriba, derecha). De derecha a izquierda hacemos agrupaciones verticales y contamos las intersecciones (puntitos negros).

6 por la derecha

$4 + 3 = 7$ en el centro

2 a la izquierda

Entonces el producto: $23 \times 12 = 276$

APRENDIZAJES ESPERADOS



Comunicación matemática

- Identificarán los términos de las operaciones aritméticas.
- Utilizarán los algoritmos de las operaciones aritméticas.
- Utilizarán las propiedades de las operaciones aritméticas.
- Identificarán los términos de la división.

Razonamiento y demostración

- Determinarán las fórmulas para la suma de los términos de una P.A.
- Usarán los métodos para calcular el complemento aritmético.
- Deducirán las propiedades en la división.

Resolución de problemas

- Determinarán las cifras (cripto aritmética) en una operación aritmética.
- Usarán las cuatro operaciones combinadas para resolver problemas de la vida cotidiana.

Cuatro operaciones: Adición

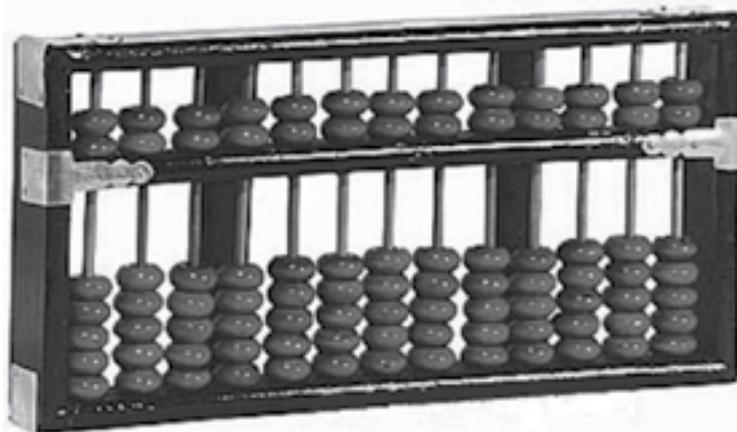
En este capítulo aprenderemos:

- A identificar los términos de las operaciones aritméticas.
- A utilizar los algoritmos de las operaciones aritméticas.
- A utilizar las propiedades de las operaciones aritméticas
- A determinar las fórmulas para la suma de los términos de una P.A.
- A determinar las cifras (cripto aritmética) en una operación aritmética.

Ábaco Chino

El ábaco es un mecanismo formado por bolas de madera, estas bolas están sistemáticamente colocadas en una tablilla conocida con el nombre de Ábaco Chino. El término Aritmética del ábaco se le podría denominar ciencia de los números pero ya que se usa comúnmente en la vida comercial, es más apropiado hablar de ella como arte del cálculo.

Comparando la Aritmética del ábaco y la Aritmética escrita o Aritmética del lápiz, ambas presentan sus puntos débiles y sus puntos fuertes. Al tratar con problemas complejos, la Aritmética del lápiz es más práctica pero para la mayoría de las operaciones contables habituales, es mucho más conveniente la Aritmética del ábaco. Su mayor ventaja sobre la Aritmética del lápiz, es la economía de tiempo. Se puede decir con certeza que para resolver cualquier problema con las operaciones fundamentales de la Aritmética necesitaremos la mitad del tiempo usando el ábaco, del que necesitaríamos usando la numeración escrita.



- ¿Cómo sumarías 34 y 45 usando el ábaco chino?
- Al operar: $234 + 456 + 274 + 356$ con la Aritmética del ábaco y la Aritmética del lápiz, ¿cuál es más rápida?

Saberes previos



Completa con números:

	Cuadrado de 3			Cubo de 7			Cubo de 2	
	Cuadrado de 21			$100_{(7)}$ a base 10			La serie natural de 1; 2; ...	
$1+2+\dots+9$				Dos docenas			$64_{(8)}$ a base 10	
				Menor # de tres cifras diferentes			Máx. punt. en dados	
# cuadrado perfecto			$123 + 923$					4 docenas
# primo y par			CXI					Enroque
		Capicúa				# capicúa	Media centena	
		Una docena				Después del 100	$2 + 4 \times 8$	
Neutro		Una docena			Menor # de 4 cifras diferentes	Una vuelta en grados		
# par		Cifras pares			9 centenas	37 al cuadrado		
				$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$				XV + LIX
				$657 + 613$				$3 + 33 + 333$
							3 unidades y 8 decenas	
Cuadrado de 51			Tres cifras diferentes que son # primos				3 centenas + 1	
$1 + 3 + 5 + \dots + 11$								
	Una vuelta en grados	Múltiplo de 80						1/2 docena
	Raíz cúbica de 512	Múltiplo de 9						8 docenas
					$1023 + 8876$			
					$21 + LIV$			
Múltiplo de 9						Menor # de cuatro cifras diferentes	$6^2 + 7^2$	
Cuadrado de 7							$1 + 3 + 5 + \dots + 15$	

Conceptos básicos

Adición

Es una operación aritmética que tiene por propósito reunir dos o más cantidades homogéneas en una sola.

$$\begin{array}{r} 4 + 5 + 9 = 18 \\ \text{Sumandos} \quad \text{Suma} \end{array}$$

Recuerda que....

La adición es toda la operación y la suma es el resultado de la operación.

Algoritmo de la adición

Debemos ordenar los sumandos de modo que se sumen las unidades, decenas, etc. respectivamente

→ Ejemplos:

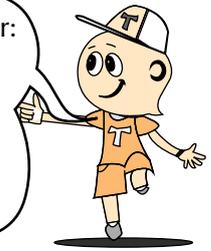
- Calcular: $234 + 3561 + 43$

$$\begin{array}{r} 234 + \\ 3561 + \\ 43 + \\ \hline 3838 \end{array}$$

las unidades = 8
 las decenas = 13 (se pone 3 y se lleva 1)
 las centenas = 7 (más lo que se lleva 8)
 los millares = 3

También se pueden acomodar:

$$\begin{array}{r} 8 + \\ 13 \\ 7 \\ \hline 3838 \end{array} \text{ será la suma}$$



- Calcular: $234_{(7)} + 23_{(7)} + 323_{(7)}$

$$\begin{array}{r} 234 + \\ 23 + \\ 323 + \\ \hline 613_{(7)} \end{array}$$

Primer orden: $10 = 13_{(7)}$ (se pone 3 y llevo 1)
 Segundo orden: $7 = 10_{(7)}$ (más 1 es $11_{(7)}$, se pone 1 y lleva 1)
 Tercer orden: 5 (más lo que se lleva 6)

Recuerda que....

$$\begin{array}{r} 10 \overline{)7} \\ 3 \quad 1 \end{array} \text{ entonces: } 10 = 13_{(7)}$$

- Calcular: $635_{(8)} + 624_{(8)} + 356_{(8)}$

$$\begin{array}{r} 635 + \\ 624 + \\ 356 + \\ \hline 2037_{(8)} \end{array}$$

Primer orden: $15 = 17_{(8)}$ (se pone 7 y llevo 1)
 Segundo orden: $10 = 12_{(8)}$ (más 1 es $13_{(8)}$, se pone 3 y lleva 1)
 Tercer orden: $15 = 17_{(8)}$ (más 1, se pone $20_{(8)}$)

Recuerda que....

$$17_{(8)} + 1 = (1 \times 8 + 7) + 1 = 16 = 20_{(8)}$$

Cripto aritmética (Adición)

El objetivo es descubrir el valor de las cifras desconocidas con la ayuda del algoritmo de la adición. Se recomienda ordenar las cifras por órdenes.

➔ Ejemplos:

- Hallar "a + b", si: $\overline{4a6} + \overline{64a} + \overline{ba4} = \overline{17a5}$

$$\begin{array}{r} 4 \ a \ 6 \ + \\ 6 \ 4 \ a \\ \hline b \ a \ 4 \\ 1 \ 7 \ a \ 5 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Las unidades: } a + 10 = 15 \Rightarrow a = 5 \\ \text{Las centenas: } 10 + b + (1) = 17 \Rightarrow b = 6 \end{array} \right\} \rightarrow a + b = 11$$

- Hallar "a + b + c", si: $\overline{4a2}_{(5)} + \overline{4a}_{(5)} + \overline{ba3}_{(5)} = \overline{13c2}_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 4 \ a \ 2 \ + \\ \quad 4 \ a \\ \hline b \ a \ 3 \\ 1 \ 3 \ c \ 2 \ (5) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Primer orden: } a + 5 = 12_{(5)} \Rightarrow a = 2 \\ \text{Segundo orden: } 2a + 4 + (1) = 14_{(5)} \Rightarrow c = 4 \\ \text{Tercer orden: } 4 + b + (1) = 13_{(5)} \Rightarrow b = 3 \end{array} \right\} \rightarrow a + b + c = 9$$

Suma de los términos de una progresión aritmética

Recordemos que en la P.A.

- La diferencia de dos términos contínuos es constante, esta diferencia se llama razón

➔ Ejemplo:

En la P.A.: 3; 10; 17; 24; ...

La razón es: $10 - 3 = 17 - 10 = 24 - 17 = 7$

- Para determinar el término enésimo: $a_n = a_1 + (n - 1)r$.

➔ Ejemplo:

En la P.A.: 3; 10; 17; 24; ...

El término enésimo es: $a_n = 3 + (n - 1)7 = 7n - 4$

- Para determinar la cantidad de términos: $n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$

➔ Ejemplo:

En la P.A.: 3; 10; 17; 24; ...; 87

La cantidad de términos es: $n = \frac{87 - 3}{7} + 1 = 13$

∴ La suma de los términos es:

$$S = \left[\frac{\text{Primero} + \text{último}}{2} \right] \times (\text{número de términos})$$

➔ Ejemplo:

- Calcular: $2 + 5 + 8 + \dots + 32$

La razón: $r = 3$

Cantidad de términos: $n = \frac{32 - 2}{3} + 1 = 11 \Rightarrow$ La suma: $S = \left[\frac{2 + 32}{2} \right] \times 11 = 187$

➔ Ejemplo:

- Calcular: $2 + 7 + 12 + \dots$ (los 12 primeros términos)

La razón: $r = 5$

El último término: $a_{12} = 2 + (12 - 1) \times 5 = 57 \Rightarrow$ La suma: $S = \left(\frac{2 + 57}{2}\right) \times 12 = 354$

Sumatorias especiales

Son sumatorias frecuentemente utilizadas, como son sucesiones, también se puede aplicar las fórmulas de la progresión aritmética.

La suma de los primeros números naturales

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}_{\text{"n" números}} = \frac{n(n + 1)}{2}$$

La sucesión: $1 + 2 + 3 + \dots + 22$ también es una P.A.
 $S = \left(\frac{1 + 22}{2}\right) \times 22 = 253$



La suma de los primeros números pares

$$\underbrace{2 + 4 + 6 + \dots + (2n)}_{\text{"n" números}} = n(n + 1)$$

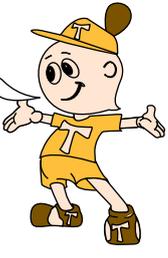
Como en la suma:
 $2 + 4 + 6 + \dots + 42$,
 el último sumando es: $42 = 2n$
 El número de términos es: $n = 21$
 $S = 21(21 + 1) = 462$



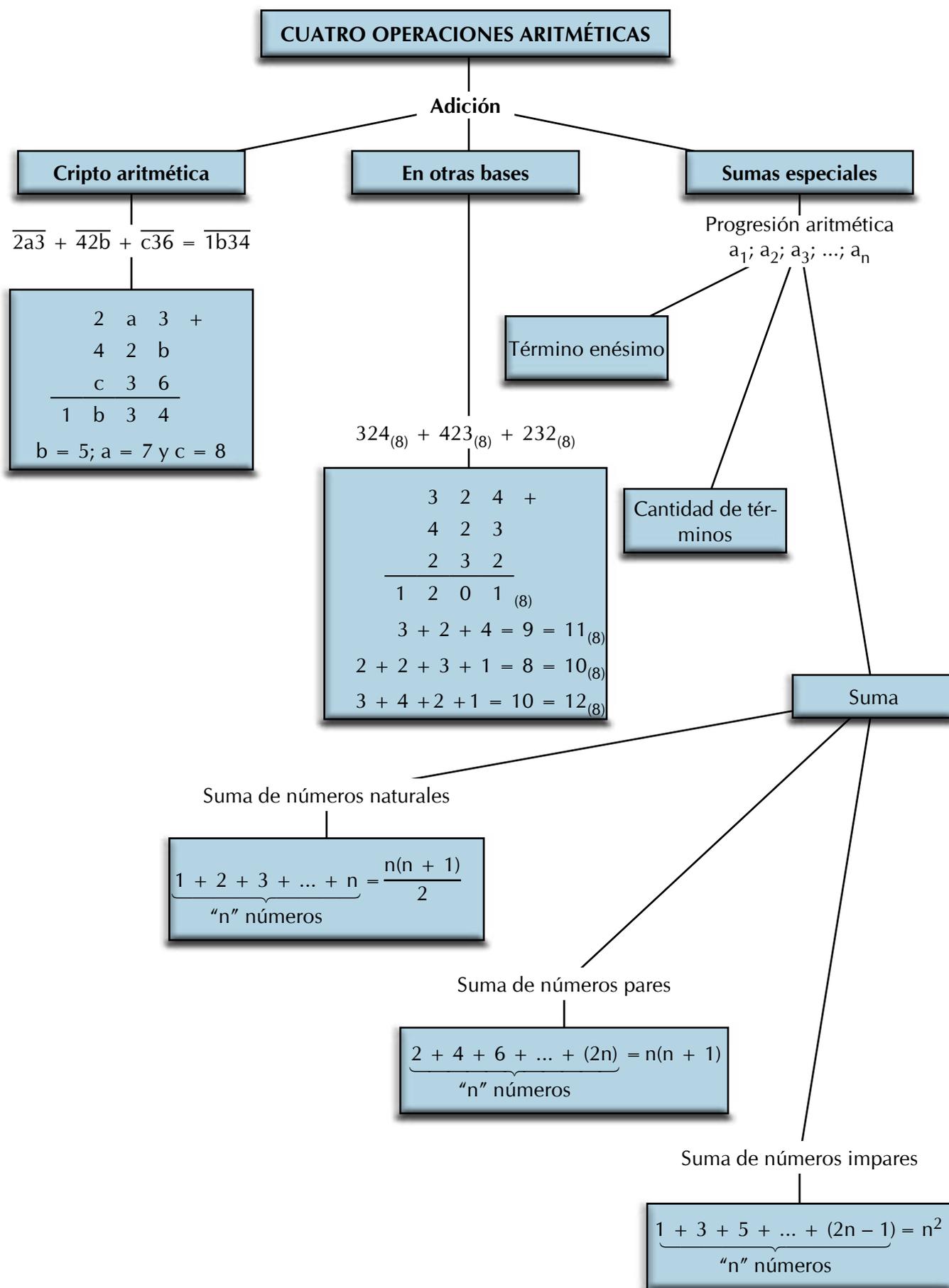
La suma de los primeros números impares

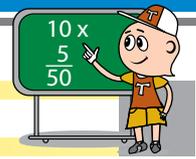
$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}_{\text{"n" números}} = n^2$$

La suma: $1 + 3 + 5 + \dots + 47$,
 como el último sumando es: $47 = 2n - 1$
 El número de términos es: $n = 24$
 $S = 24^2 = 576$



Síntesis teórica





Aplica lo comprendido

1. Si: $2 + 22 + 222 + \dots + \underbrace{22\dots2}_{9 \text{ cifras}} = \overline{\dots abc}$

Hallar: $a + b + c$

2. La suma de:
- El mayor número de tres cifras
 - El menor número de tres cifras diferentes
 - El mayor número de tres cifras diferentes
 - El menor número de tres cifras

es igual a:

3. Si " $a + b + c$ " es 15, hallar:
 $\overline{2a3b} + \overline{b2ca} + \overline{abb3} + \overline{ccac}$.
4. Calcular: $23_{(5)} + 43_{(5)}$ en base cinco
5. Calcular la suma: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 20$



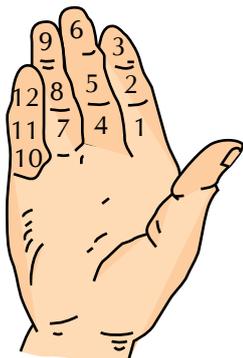
Aprende más

1. Calcular " $A + B - C$ ", si:
 $A = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 19$
 $B = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 20$
 $C = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 20$
2. Hallar la suma de los términos de la P.A.
 $12 + 17 + 22 + \dots + 97$
3. Si: $a + b = 12$, hallar: $\overline{4aa5} + \overline{b45b} + \overline{abba}$.
4. Determinar " $a + b$ ", si: $\overline{4aa5} + \overline{2aaa} = \overline{abb2}$
5. Hallar la cifra de mayor orden de la suma de los 15 primeros números naturales positivos.
6. Determinar " $a + b + c$ ", si:
 $\overline{ab7} + \overline{3ab} + 234 = \overline{c036}$
7. En la siguiente operación:
 $\overline{a7a} + \overline{1a} + \overline{1aa} = \overline{cb6}$, hallar " $a + b + c$ ".
8. Efectuar: $312_{(5)} + 443_{(5)} + 224_{(5)}$

9. Calcular: $415_{(7)} + 362_{(7)} + 254_{(7)}$
10. Calcular:
 $11 + 22 + 33 + 44 + \dots + 154$
11. Calcular: $S = \underbrace{2 + 10 + 18 + 26 + \dots}_{(40 \text{ sumandos})}$.
12. Hallar " $a + b + c + d$ ", si:
 $\overline{15abcd} + 487278 = \overline{abcd15}$
13. Para sumar:
 $123456789 + 12345678 + 1234567 + \dots + 1$
 La suma de las dos últimas cifras es:
14. Si: $N = \overline{cdu}$ y $c + d + u = 13$,
 tal que: $\overline{cd} + \overline{du} = 97$, hallar " N ".
15. Hallar " $a.b.c$ ", si se sabe que:
 $\overline{45ab} = \overline{38bc} + \overline{abc}$

Aplicación cotidiana

Docenas, gruesas y masas



16. ¿Cómo se realizará: $364_{(12)} + 478_{(12)}$?
17. ¿Cómo se suma: 5 docenas, 6 gruesas, 4 unidades + 8 gruesas, 9 docenas, 9 unidades?



¡Tú puedes!

1. Hallar el valor de “ $x + y + z$ ”, si:

$$\begin{array}{r}
 2 + \\
 33 \\
 222 \\
 3333 \\
 22222 \\
 \vdots \\
 \underline{333 \dots 333} \\
 x \ y \ z
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 2 + \\ 33 \\ 222 \\ 3333 \\ 22222 \\ \vdots \\ 333 \dots 333 \end{array}} \right\} 10 \text{ sumandos}$$

- a) 15 b) 14 c) 16 d) 13 e) 12
2. Si “P” y “Q” representan las sumas, respectivamente de los pares positivos e impares positivos no mayores que 1 000, calcular “ $A - B$ ”
- a) 0 b) 499 c) 500 d) 501 e) 1 000
3. La suma de 25 números consecutivos positivos es 900. Hallar la suma de todos los números naturales anteriores a dichos 25 números
- a) 672 b) 276 c) 726 d) 727 e) 267
4. Hallar “x”, si: $\overline{abc} + \overline{b0a} + \overline{ac} + \overline{cb} = \overline{1x27}$
- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5
5. Hallar la suma de las cifras del resultado que se obtiene al sumar:

$$9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999 \dots 999}_{28 \text{ cifras}}$$

- a) 26 b) 36 c) 27 d) 30 e) 18



Practica en casa

1. Calcular “ $a + b$ ”, si: $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = \overline{ab}$
2. Calcular “ $A + B$ ”, si:
 $A = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 29$
 $B = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 28$
3. Hallar la suma de los términos de la P.A.
 $11 + 17 + 23 + \dots + 95$
4. Hallar “ $a + b$ ”, si:
 $101 + 202 + 303 + \dots + 909 = \overline{abab}$
5. Hallar la cifra de mayor orden de la suma de los 25 primeros números naturales positivos.
6. Efectuar: $312_{(6)} + 443_{(6)}$
7. Calcular: $415_{(9)} + 362_{(9)} + 254_{(9)}$
8. Calcular:
 $11 + 21 + 31 + 41 + \dots + 151$
9. Calcular:
 $S = 2 + 10 + 18 + 26 + \dots$ (30 sumandos)

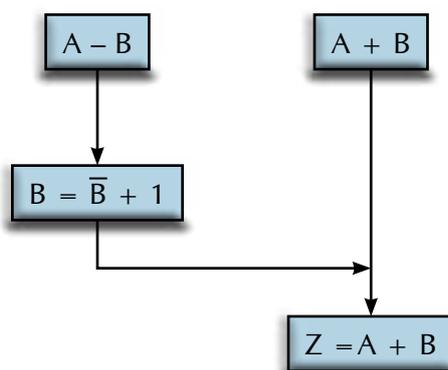
- 10.** Determina la suma de todos los números de tres cifras que terminan en 7
- 11.** Hallar "x + y", si: $\overline{1x4} + \overline{5xx} = \overline{6y7}$
- 12.** Si: $a + b = 15$, hallar: $\overline{4aa5} + \overline{b45b} + \overline{abba}$.
- 13.** Hallar "a + b", si: $\overline{2ab} + \overline{ab6} = \overline{b23}$
- 14.** Calcular la suma de las cifras de:
 $E = \overline{mnpq} + \overline{abcd}$
si: $\overline{mn} + \overline{ab} = 134$ y $\overline{cd} + \overline{pq} = 127$
- 15.** Al efectuar:
 $987654321 + 98765432 + 9876543 + \dots + 9$
La suma de las dos últimas cifras es:

Sustracción

En este capítulo aprenderemos:

- A identificar los términos de la sustracción.
- A utilizar la definición de complemento aritmético

Convierte la sustracción en adición



Así por ejemplo: $3\ 456 + 543 - 357$

El complemento aritmético de 357 es 633

$$\begin{array}{r}
 3\ 4\ 5\ 6\ + \\
 \quad 5\ 4\ 3 \\
 \hline
 \bar{1}\ 6\ 3\ 3 \\
 \hline
 3\ 6\ 3\ 2
 \end{array}$$

Las computadoras también usan este método: $101101_{(2)} - 11110_{(2)}$

El complemento aritmético de $11110_{(2)}$ es $10_{(2)}$

$$\begin{array}{r}
 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1_{(2)}\ + \\
 \bar{1}\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0_{(2)} \\
 \hline
 \quad 1\ 1\ 1\ 1_{(2)}
 \end{array}$$

- ¿Cómo hallarías: $5\ 234 - 1\ 456 + 2\ 274 - 356$, usando el complemento aritmético?

Saberes previos

Completa con números:

Cuadrado de 41				$2 + 4 + \dots + 20$	
$254 + 659$				Cubo de 2	
	$1 + 3 + 5 + \dots + 21$			23 elevado a la 0	
	Máxima cifra			$345 + 502$	
		$1 + 3 + 5 + 7$	2 docenas + 4		Docena y media
		$1 + 14 \times 5$	Potencia de 2		8 docenas
				$1 + 2 + \dots + 9$	
				Menor # de cuatro cifras diferentes	
7 centenas					6 docenas
Número capicúa					$23655 + 52119$
	10 docenas			$3 + 2 \times 2$	
	$1 + 3 + 5$			$3 \times 3 - 2$	
		$4ab - 3ab$			
		Cuadrado de 13			

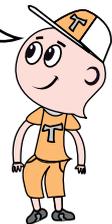
Conceptos básicos

Sustracción

Es una operación aritmética inversa a la adición, que tiene por propósito determinar el exceso de una cantidad sobre otra.

M	-	S	=	D
Minuendo		Sustraendo		Diferencia

Recuerda que la sustracción es la operación inversa de la adición, entonces la suma del sustraendo y diferencia es igual al minuendo



➔ Ejemplo:

La suma de los términos de una sustracción es 264 y el sustraendo es el doble de la diferencia. ¿Cuáles son los términos de la sustracción?

$M - S = D$	entonces:	$M = S + D$	(1)
	Además:	$M + S + D = 264$	(2)
	Dato:	$S = 2D$	(3)
Reemplazando (1) en (2):		$2M = 264$	
		$M = 132$	
Reemplazando (3) en (1):		$M = 3D$	
		$D = 44$	
Entonces:		$D = 44; S = 88$ y $M = 132$	

Algoritmo de la sustracción

Debemos ordenar el minuendo y sustraendo de modo que se resten las unidades, decenas, etc., respectivamente

➔ Ejemplos:

- Calcular: $7\ 234 - 3\ 561$

Las unidades = $4 - 1 = 3$
 Las decenas = $(10 + 3) - 6 = 7$
 Las centenas = $(10 + 1) - 5 = 6$
 Los millares = $(7 - 1) - 3 = 3$

$$\begin{array}{r} 7\ 2\ 3\ 4\ - \\ 3\ 5\ 6\ 1 \\ \hline 3\ 6\ 7\ 3 \end{array}$$

Para comprobar, al sumar el sustraendo y diferencia obtenemos el minuendo

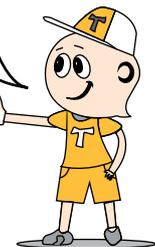


- Calcular: $524_{(7)} - 43_{(7)}$

Primer orden: $4 - 3 = 1$
 Segundo orden: $7 + 2 - 4 = 5$
 (se presta una unidad de tercer orden)
 Tercer orden: $5 - 1 = 4$

$$\begin{array}{r} 5\ 2\ 4_{(7)}\ - \\ 4\ 3_{(7)} \\ \hline 4\ 5\ 1_{(7)} \end{array}$$

En el sistema heptal, 7 unidades forman una unidad superior



Cripto aritmética (Sustracción)

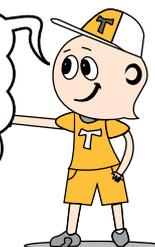
El objetivo es descubrir el valor de las cifras desconocidas con la ayuda del algoritmo de la sustracción.

➔ Ejemplo:

- Hallar "a + b", si: $\overline{64a} - \overline{ba4} = \overline{1c5}$
 Las unidades: $a - 4 = 5 \Rightarrow a = 9$
 Las decenas: $10 + 4 - a = c \Rightarrow c = 5$
 Las centenas: $6 - 1 - b = 1 \Rightarrow b = 4$

$$\begin{array}{r} 6\ 4\ a\ - \\ b\ a\ 4 \\ \hline 1\ c\ 5 \end{array}$$

Como para comprobar la sustracción, se suma el sustraendo y la diferencia, entonces podemos plantear una adición:
 $\overline{64a} = \overline{ba4} + \overline{1c5}$



Sustracción especial

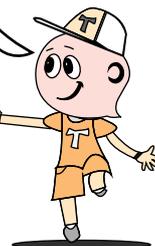
Se da de la diferencia entre un número y el que resulta de invertir el orden de sus cifras.

- Para un número de dos cifras:

$$\begin{aligned} \overline{ab} - \overline{ba} = \overline{xy} &\Rightarrow 9(a - b) = \overline{xy} \\ &\Rightarrow x + y = 9 \end{aligned}$$

Observa las siguientes diferencias:

$$\begin{aligned} 72 - 27 &= 45 \\ 51 - 15 &= 36 \\ 81 - 18 &= 63 \end{aligned}$$



➔ Ejemplo:

Calcular "a + b", si: $\overline{ab} - \overline{ba} = \overline{7y}$

Como: $7 + y = 9 \Rightarrow y = 2$, también: $9(a - b) = 72$
 $a - b = 8$

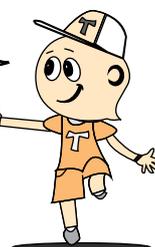
Las únicas cifras que se diferencian en 8, son: $a = 9$ y $b = 1$

- Para un número de tres cifras:

$$\begin{aligned} \overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xny} &\Rightarrow 99(a - c) = \overline{xny} \\ &\Rightarrow x + y = 9 \\ &\Rightarrow n = 9 \end{aligned}$$

Observa las siguientes diferencias:

$$\begin{aligned} 723 - 327 &= 396 \\ 502 - 205 &= 297 \\ 851 - 158 &= 693 \end{aligned}$$



➔ **Ejemplo:**

Calcular: $\overline{xy} + \overline{yz} + \overline{zx}$, si: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xyz}$

En la sustracción: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xyz} \Rightarrow x + z = 9$
 $\Rightarrow y = 9$

Descomponiendo los números de la adición:

$$(10x + y) + (10y + z) + (10z + x) = 11(x + y + z) = 11 \cdot 18 = 198$$

Complemento aritmético

Es la cantidad de unidades que le faltan a un número para ser igual a la unidad inmediata superior.

Si "N" es de "n" cifras, la unidad superior es 10^n

Luego, el complemento aritmético es:

$$\text{C.A.}(N) = 10^n - N$$



➔ **Ejemplos:**

- Para 234 la unidad superior es 1 000, entonces el complemento aritmético de 234, será lo que le falta para ser 1 000.

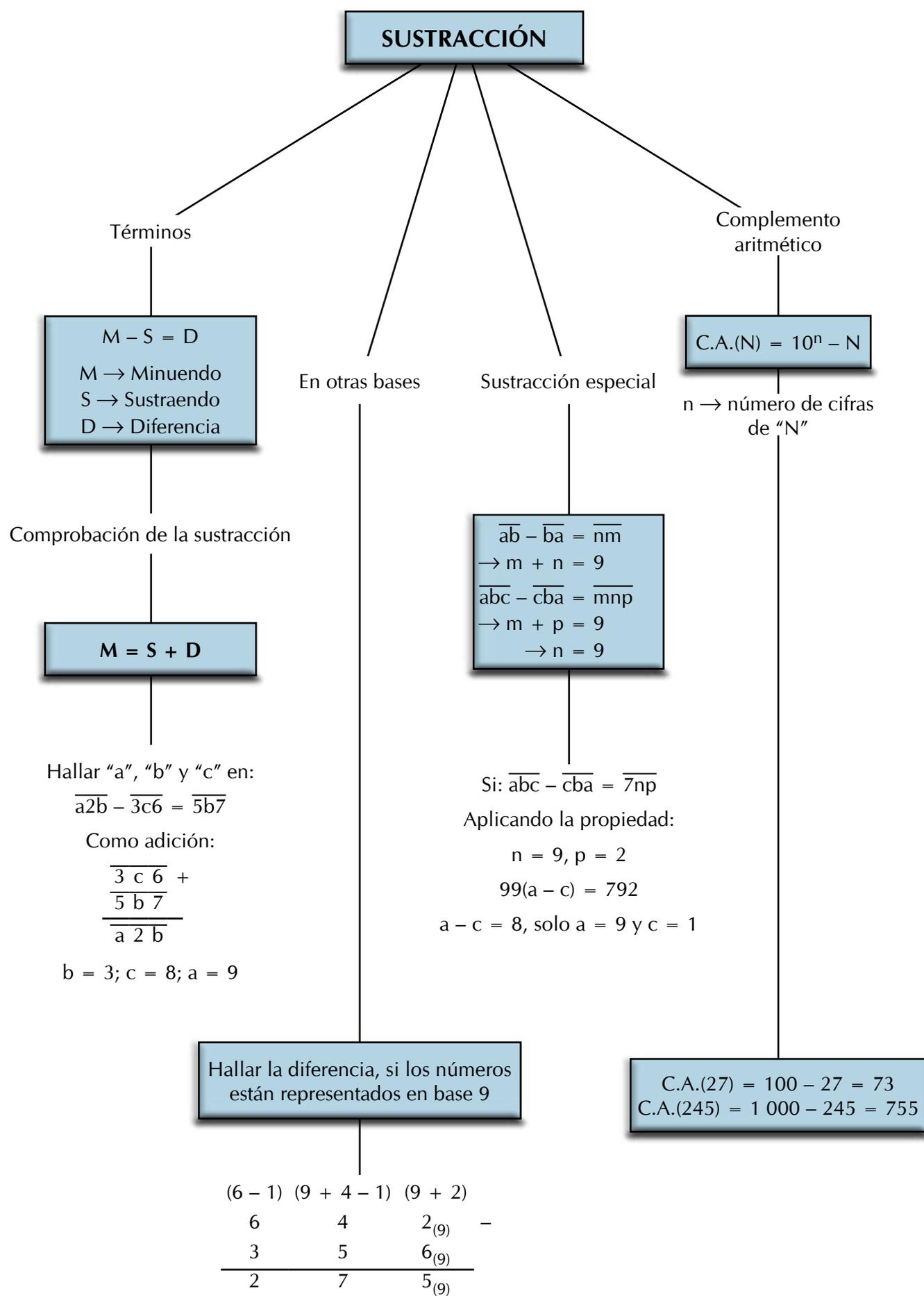
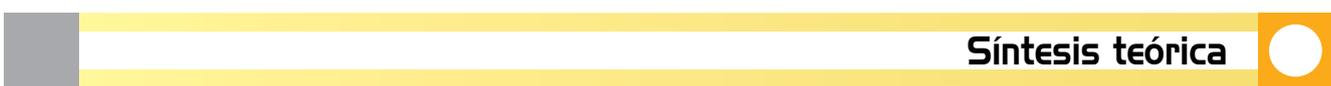
$$\text{C.A.}(234) = 1\ 000 - 234 = 766$$

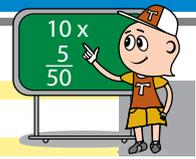
- Calcular: $\text{C.A.}(\text{C.A.}(756)) + \text{C.A.}(\text{C.A.}(934)) + \text{C.A.}(\text{C.A.}(997))$

Como son números de tres cifras, la unidad superior es 1 000.

$$\text{CA}(244) + \text{CA}(66) + \text{CA}(3)$$

$$756 + 34 + 7 = 797$$





Aplica lo comprendido

1. Determina en la columna central si corresponde " $<$ ", " $>$ " o " $=$ ":

CA(23) =		CA(32) =
CA(923) =		CA(23) =
CA(993) =		CA(97) =

2. Determina las siguientes diferencias:

$$431 - 134 = \qquad 842 - 248 =$$

$$591 - 195 =$$

3. Calcula las cifras "a", "b" y "c", si: $\overline{14b5} - \overline{a52} = \overline{62c}$

4. Si el complemento aritmético de \overline{abcd} es 234, identifica los valores de:

$$a = \qquad b =$$

$$c = \qquad d =$$

5. En la siguiente sustracción: $594 + \overline{abc} = \overline{cba}$, hallar "a", si: $a + c = 10$



Aprende más

- Si: $a - b = 4$, hallar: $\overline{4a5b} - \overline{2b7a}$
- Efectuar: $1312_{(5)} - 443_{(5)}$
- Si: $a - b = 4$, hallar: $\overline{2a5b}_{(7)} - \overline{b3a}_{(7)}$
- Si: $m - n = 5$, hallar: $\overline{4m5n}_{(9)} - \overline{1n5m}_{(9)}$
- La suma de los términos de una sustracción es 1 024 y el minuendo es el cuádruplo del sustraendo. ¿Cuál es la diferencia?
- La suma de los términos de una sustracción es 624 y el sustraendo es el doble de la diferencia. ¿Cuál es el sustraendo?
- Si el complemento aritmético de \overline{abcd} es $\overline{bcd2}$, entonces "a + b + c + d" es:
- Si el complemento aritmético de \overline{abcd} es \overline{mnp} , entonces la suma de \overline{abcd} y \overline{mnp} es:
- Hallar "x + y", si: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xy3}$
- Hallar un número de tres cifras, sabiendo que si se le agrega 245 resulta el doble de su complemento aritmético.
- El número de tres cifras que restado de su complemento aritmético da 286 es:
- Si: $\overline{mcd} - \overline{dcm} = \overline{alé}$, hallar: $\overline{lea} + \overline{alé} + \overline{eaí}$.
- La suma de los tres términos de una sustracción es 1 092. Si el sustraendo es la sexta parte del minuendo, hallar la suma de cifras del complemento aritmético de la diferencia.

14. Si el complemento aritmético de \overline{abcd} es $\overline{(a-1)(b-2)}$, hallar "a + b + c + d"

15. Un número de cuatro cifras diferentes de cero tiene como suma de cifras a 24. Hallar la suma de cifras de su complemento aritmético.

Aplicación cotidiana

Una boleta informativa del banco

Esta es la boleta que un cliente ha pedido al banco para saber el estado de su cuenta corriente:

Consulta tus saldos y movimientos

Últimos movimientos

Fecha	Descripción	Nuevos Soles	Dólares
24/02	Plaza Veá Rísson	6,38	
25/02	Norky's	22,50	
05/03	Pago ventanilla	99,96	
07/03	Plaza Veá Rísson	44,49	
25/03	Pago Bca Internet	50,00	
10/04	Pago Bca Internet	300,00	
27/04	Pago Bca Internet	60,00	
24/05	Pago Ventanilla	100,00	
30/06	Pago Bca Internet	70,00	
24/07	Pago Bca Internet	70,00	
Línea de crédito		S/. 4 000,00	
Crédito utilizado		S/. 536,32	

- ¿Cuáles son los pagos que se realizaron en los meses de mayo, junio y julio?
- ¿Cuál es el monto utilizado por este cliente hasta el 24 de julio?



¡Tú puedes!



- Si: $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 2\ 109$ y $\overline{abc} - \overline{bca} = 261$, hallar "a . b . c".
a) 224 b) 208 c) 196 d) 221 e) 168
- Si: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{mn(m+1)}$, hallar "a - c".
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6
- Hallar el mayor número \overline{abc} tal que: $C.A.(\overline{abc}) = 2(\overline{cba} - 1)$ y dar como respuesta "a + b + c".
a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 12
- Si: $\overline{abc4} - \overline{4cba} = 4\ 635$ y $b + c = 8$, hallar "a + b - c".
a) 5 b) 4 c) 7 d) 8 e) 3
- Hallar la suma de las cifras de $\overline{ab2}$, sabiendo que este número disminuido en su C.A. da un número de tres cifras iguales.
a) 9 b) 11 c) 13 d) 15 e) 6



Practica en casa



- Si: $a - b = 3$, hallar: $\overline{4a5b} - \overline{2b7a}$
- Si: $m - n = 4$, hallar: $\overline{4m5n} - \overline{1n5m}$
- Efectuar: $4412_{(7)} - 1443_{(7)}$
- Si: $a - b = 3$, hallar: $\overline{2a5b}_{(8)} - \overline{b3a}_{(8)}$
- La suma de los términos de una sustracción es 612 y el minuendo es el doble del sustraendo. ¿Cuál es el sustraendo?
- Si el complemento aritmético de \overline{abcd} es $\overline{bcd4}$, entonces "a + b + c + d" es:
- Hallar "x + y", si: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xy6}$
- Hallar un número de tres cifras, sabiendo que si se le quita 145 resulta el doble de su complemento aritmético.
- El número de tres cifras que restado de su complemento aritmético da 484 es:
- Si: $\overline{mcd} - \overline{dcm} = \overline{alé}$, hallar: $\overline{aaa} + \overline{lll} + \overline{eee}$
- La suma de los tres términos de una sustracción es 1 090. Si el sustraendo es la quinta parte del minuendo, hallar la suma de cifras del complemento aritmético de la diferencia.
- Si el complemento aritmético de \overline{abcd} es $\overline{(a-4)(b-3)}$, hallar "a + b + c + d"
- Un número de cuatro cifras diferentes de cero tiene como suma de cifras a 18. Hallar la suma de cifras de su complemento aritmético.
- Hallar "a + b + c", si el complemento aritmético de \overline{abc} es $\overline{(a+3)(c+1)(b+2)}$
- Si: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{6mn}$, y además: $a + c = 11$, hallar "2a + 3c"

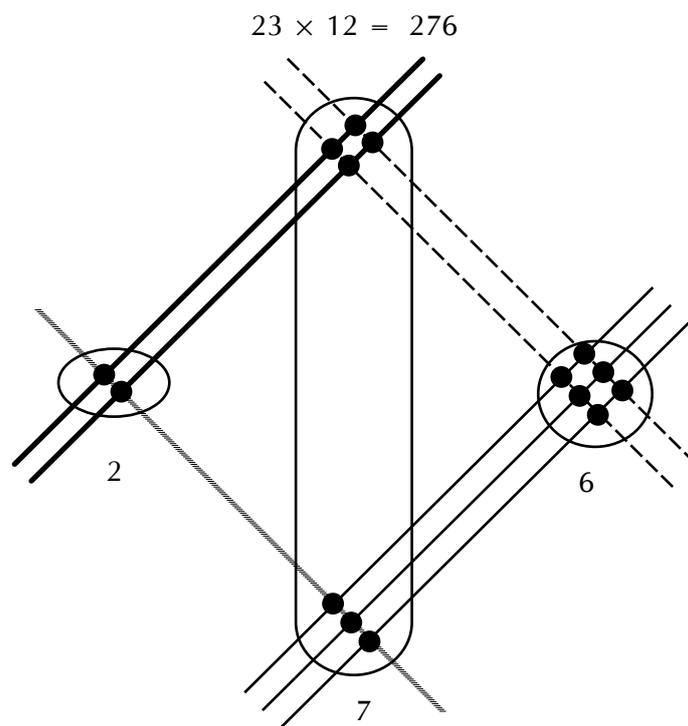
Multiplicación

En este capítulo aprenderemos:

- A identificar los términos de la multiplicación.
- A reconocer los productos parciales y el producto total.
- A determinar las cifras terminales de un producto.
- A determinar la variación de los términos de la multiplicación.

Multipiquemos de otra manera

En este caso queremos multiplicar 23×12 . Dibujamos dos líneas paralelas (rojo) y otras 3 (azules) correspondientes a los dígitos del primer factor. Ahora, el segundo factor, amarillo (un 1) y verde (un 2). De derecha a izquierda hacemos agrupaciones verticales y contamos las intersecciones (puntitos negros). Veamos: 6 por la derecha $4 + 3 = 7$ en el centro y 2 a la izquierda. Entonces: $23 \times 12 = 276$



- Con este método, el producto de 52×34 es:
 - ¿Podrá aplicarse a 234×32 ?

Saberes previos

Completa con números:

				47 × 51		
				6 docenas		
3 + 2 × 2			Primer número primo			
1 + 2 + 3 + ... + 9			1 + 3 + 5 + ... + 15			
	Cuadrado de 7	7+7+7+ ... (9 veces)			Cubo de 3	
	Cuadrado de 2	C.A. (7989)			1 + 3 + 5 + 7 + 9	
						36 × 12
						23 × 11
24 × 23				24 × 22		Una mano
13 × 17				1 × 3 × 5 × 7		C.A.(57)
			9 + 9 + 9 + ... (15 veces)			
			Cuádruplo de 31			
	17 × 15			24 elevado a la 0	Número capicúa	
	6 docenas			13 × 7	C.A.(7)	

C.A.(N) = Complemento aritmético de "N".

Conceptos básicos

Multiplicación

Es la operación aritmética que abrevia una adición, donde los sumandos son iguales (multiplicando) y la cantidad de ellos es el otro número (multiplicador).

$$\underbrace{A \times B}_{\text{Factores}} = \underbrace{P}_{\text{Producto}}$$

Recuerda que:

$$2 + 2 + \dots + 2 + 2 = 2 \times 13$$

13 sumandos
2 es el multiplicando
13 es el multiplicador



Algoritmo de la multiplicación

Debemos ordenar los productos parciales de modo que luego de sumarlos se determine el producto total.

➔ Ejemplo:

234 por 37

$$\begin{array}{r}
 \text{Multiplicando} \longrightarrow 234 \times \\
 \text{Multiplicador} \longrightarrow 37 \\
 \hline
 \text{Productos parciales} \left\{ \begin{array}{l} 1638 \\ 702 \end{array} \right. \\
 \hline
 \text{Producto total} \longrightarrow 8658
 \end{array}$$

Cripto aritmética (Multiplicación)

El objetivo es descubrir el valor de las cifras desconocidas con la ayuda del algoritmo.

➔ Ejemplos:

- Descubre el valor de las letras en la siguiente multiplicación: $\overline{AMOR} \times 4 = \overline{ROMA}$

Unidades: $4 \times R = \overline{\dots A}$ entonces "A" es par

Millares: $4 \times A = R$, entonces solo: $A = 1; 2$

Por ello "A" es 2 y "R" es 8

$$\begin{array}{r}
 2 M O 8 \times \\
 \hline
 4 \\
 \hline
 8 O M 2
 \end{array}$$



Luego las otras cifras: $4 \times O + 3 = \overline{\dots M}$, entonces: "M" es impar

$$4 \times M + \dots = O, \text{ entonces: } M = 1 \text{ y } O = 7$$

- Determina los valores de "A", "L", "E" y "X" en la siguiente multiplicación: $\overline{ALEX} \times 9999 = \overline{\dots 3426}$

Es un caso particular, porque: $9999 = 10000 - 1 \Rightarrow \overline{ALEX} (10000 - 1) = \overline{ALEX0000} - \overline{ALEX}$

Esta diferencia:

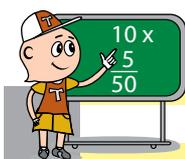
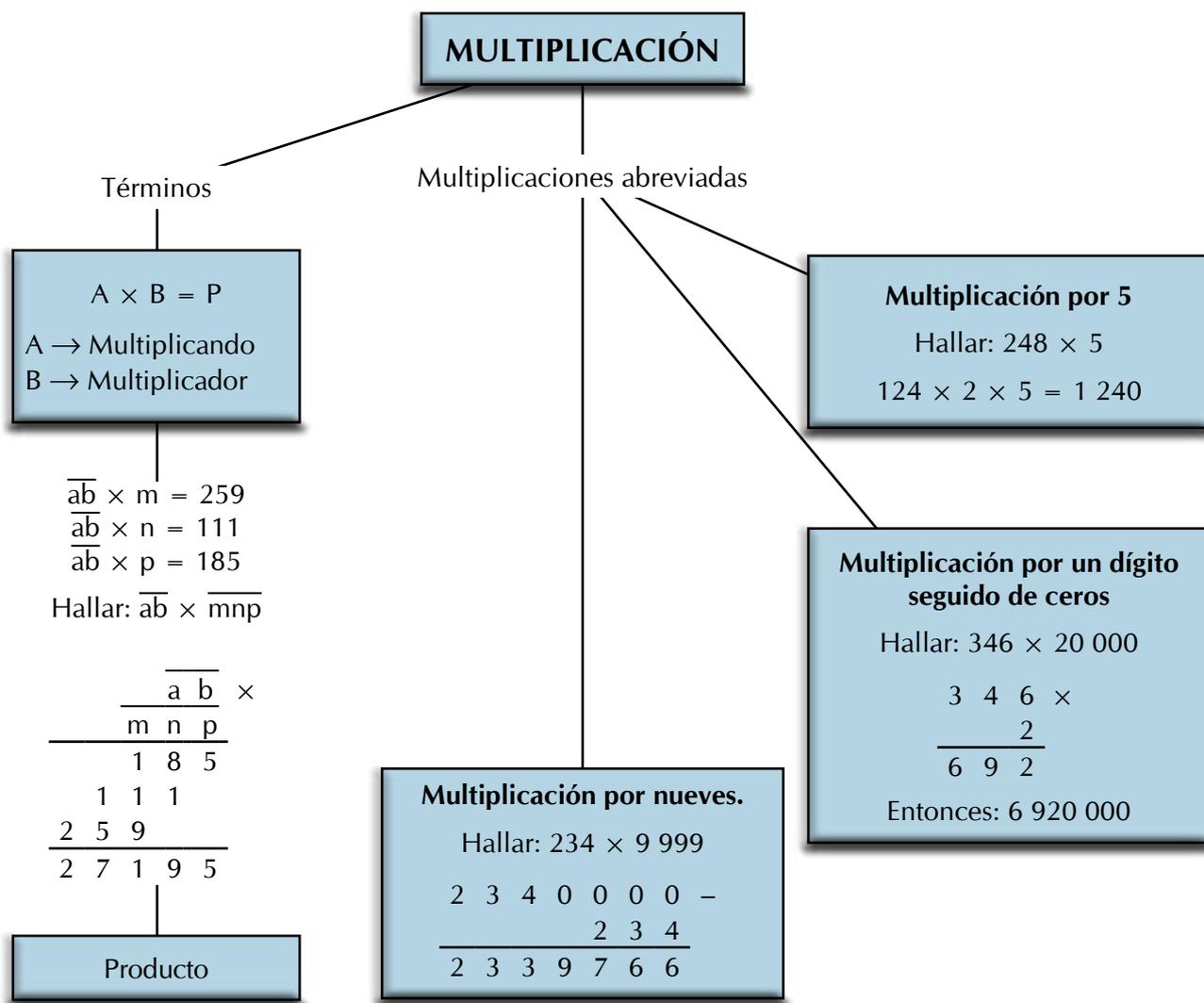
$$\begin{array}{r}
 \overline{ALEX0000} - \\
 \underline{\overline{ALEX}} \\
 \dots\dots\dots 3426
 \end{array}$$

Entonces: $X = 4; E = 7; L = 5; A = 6$

- Determina la suma de cifras del producto: $2^7 \times 3^2 \times 5^7 \times 7$

Asociando: $(2 \times 5)^7 \times 3^2 \times 7 = 10^7 \times 9 \times 7 = 630\,000\,000$

Síntesis teórica



Aplica lo comprendido

- ¿En qué cifra termina (cifra de unidades) cada una de las siguientes multiplicaciones?
 $123 \times 45 = \dots\dots\dots$
 $4\ 326 \times 723 = \dots\dots\dots$
 $5\ 432 \times 34\ 567 = \dots\dots\dots$
 $987 \times 456 = \dots\dots\dots$
- Determina el producto en las siguientes multiplicaciones:
 $23 \times 1\ 000 =$
 $450 \times 20\ 000 =$
 $65 \times 300\ 000 =$
 $21\ 000 \times 2\ 000 =$
- Determina el producto de 23 por 9 999
- Efectúa en forma rápida:
 $234 \times 11 =$
 $342\ 345 \times 11 =$
- Determina la suma de las cifras del producto:
 $2^9 \times 3 \times 5^9 \times 7$



Aprende más

- Si \overline{abc} se multiplica por 11, el producto resultante es $\overline{m436}$, hallar "a + b + c".
- El producto de $\overline{ab5}$ por 23 es $\overline{m40m}$, hallar "a + b + m".
- El producto de \overline{ana} por 111 es $\overline{m1m04}$, hallar "m + a + n".
- Si: $\overline{a0a} \times 21 = \overline{1m8m7}$, hallar "m + a".
- Si multiplicamos \overline{abc} por 9 999 se obtiene como producto ...564. Hallar "a + b + c".
- Hallar "m + n + p", si: $\overline{abab} \times 7 = \overline{mnp68}$
- Determina la suma de cifras del producto: $5^9 \times 2^7 \times 3^3$.
- Al multiplicar 37 por $\underbrace{999 \dots 9}_{12 \text{ cifras}}$, la cantidad de cifras 9 que tiene el producto es:
- ¿Cuál es la cifra terminal del producto:

$$\underbrace{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times \dots}_{2 \text{ 012 factores}} ?$$
- Hallar "a + b + c + d", si: $\overline{\dots abcd} \times 7 = \dots 2531$
- Si: $\overline{abc} \times 19 = \dots 541$ y $\overline{abc} \times 13 = \dots 107$, hallar la suma de las tres últimas cifras del producto: $\overline{abc} \times 12$
- Si: $\overline{abc} \cdot a = 978$ y $\overline{abc} \cdot b = 652$, hallar el valor de: $\overline{abc} \cdot \overline{aba}$. Dar como respuesta la suma de cifras.
- El producto de dos números pares consecutivos es 168. Hallar la suma de los números.
- El producto de dos números es 720. Si añadimos 6 unidades al multiplicando, entonces el producto es 816. ¿Cuál es el multiplicador?
- En la multiplicación de dos números, si a uno se le quita 3 decenas, el producto disminuye en 10 830. Hallar uno de dichos números.

Aplicación cotidiana

King kong de 18 huecos

Este tipo de ladrillos, como su nombre lo dice son usados generalmente en el levantamiento de paredes y tienen agujeros en forma vertical.

Medidas: $9 \times 13 \times 23$ cm

Peso: 3,00 kg

Usos: Paredes y muros importantes

16. Calcular el área total del ladrillo.



¡Tú puedes!



- Si se sabe que: $\overline{ab} \times \overline{ba} = 3 \ 154$, hallar "a + b".
 a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11
- Si : $N \times 375 = \dots 625$ y $N \times 427 = \dots 021$, hallar las tres últimas cifras de "N × 156".
 a) 188 b) 243 c) 254 d) 366 e) 422
- Si: $\overline{aa} \times \overline{bb} = \overline{7cd3}$, hallar "c . d"
 a) 15 b) 27 c) 18 d) 16 e) 12

4. Siendo \overline{abcd} un número de cuatro cifras y:

$$\overline{abcd} \times a = 17\ 312$$

$$\overline{abcd} \times b = 12\ 984$$

$$\overline{abcd} \times \overline{cd} = 121\ 184$$

Determinar la suma de las cifras del cuadrado de \overline{abcd} .

- a) 33 b) 32 c) 37 d) 35 e) 31

5. Si: $\overline{abc}_{(6)} \times 115_{(6)} = \dots 303_{(6)}$, hallar "a + b + c"

- a) 16 b) 15 c) 11 d) 10 e) 12



Practica en casa

1. Si \overline{abc} se multiplica por 11, el producto es $\overline{m237}$. Hallar "a + b + c".

2. Si el producto de $\overline{ab3}$ por 17 es $\overline{mm01}$, hallar "a + b + m".

3. Si el producto de \overline{anna} por 11 es $\overline{5mm94}$, hallar "m + a + n".

4. Si: $\overline{a0a} \times 13 = \overline{m1m1}$, hallar "m + a".

5. Si multiplicamos \overline{abcd} por 999 se obtiene como producto $\dots 8369$. Hallar "a + b + c + d".

6. Hallar "m + n + p", si: $\overline{abab} \times 7 = \overline{mnp61}$

7. Hallar "m + n", si: $\overline{aba} \times 23 = \overline{mn36}$

8. Hallar "a + m", si: $\overline{aaa} \times 7 = \overline{3mm5}$

9. Hallar "a + m", si: $37 \times \overline{aa} = \overline{m03a}$

10. Hallar "a + b", si: $\overline{aabb} \times 77 = \dots 041$

11. Determina la suma de cifras del producto $5^9 \times 2^7 \times 3 \times 11$.

12. Al multiplicar 91 por $\underbrace{999 \dots 9}_{12 \text{ cifras}}$, la cantidad de cifras 9 que tiene el producto es:

13. El producto de dos números pares consecutivos es 624. Hallar la suma de los números.

14. El producto de dos números es 391. Si añadimos 6 unidades al multiplicando, entonces el producto es 493. ¿Cuál es el multiplicador?

15. Si: $\overline{abc} \cdot c = 1\ 659$

$$\overline{abc} \cdot b = 711$$

$$\overline{abc} \cdot a = 474$$

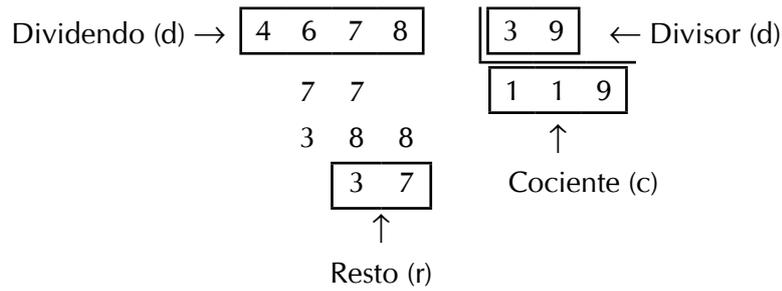
Hallar: $\overline{abc} \cdot \overline{c0b0a}$ y dar como respuesta la suma de sus cifras.

División

En este capítulo aprenderemos:

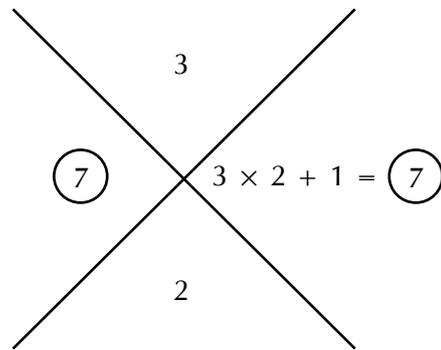
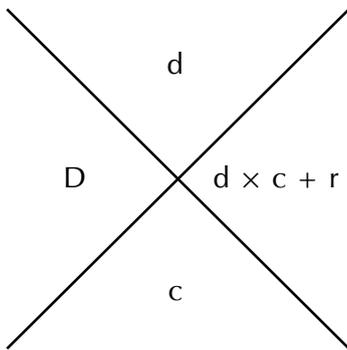
- A identificar los términos de la división.
- A reconocer las clases de división.

La prueba de los nueves



$$\begin{array}{r} D \mid d \\ r \quad c \end{array}$$

$D = 4 + 6 + 7 + 8 = 25 = 2 + 5 = 7$
 $d = 3 + 9 = 12 = 1 + 2 = 3$
 $c = 1 + 1 + 9 = 11 = 1 + 1 = 2$
 $r = 3 + 7 = 10 = 1 + 0 = 1$



Aplica este método a la siguiente división

$$\begin{array}{r} 43 \mid 12 \\ 7 \quad 3 \end{array}$$

- ¿Porqué se le llama prueba de los nueves?

Saberes previos

Completa con números:

Triple de 53				C.A.(3458)		
Cuádruplo de 34				265 entre 5		
				23 × 250		C.A.(7)
				Una decena y media		69 × 630
		511 entre 7		Doble de 47		
		245 entre 5		1041 entre 3		
	Divisor universal				Cuarta parte de 12	
	# mayor de tres cifras diferentes				1296 entre 4	
1 × 2 × 3 × 4 × 5			# capicúa			
Medio centenar			Doble de 237			
		Medio centenar + 1			91 entre 13	
		Quíntuplo de 17			225 entre 3	
				Dos decenas		
				13 × 90		

C.A.(N) = Complemento aritmético de "N".

Conceptos básicos

División

Es una operación inversa a la multiplicación que consiste en averiguar cuántas veces un número (el divisor) está contenido en otro número (el dividendo).

$$D \overline{) d} \\ q$$

D → Dividendo
d → Divisor
q → Cociente

Clases de división entera

Exacta

Si el divisor está contenido una cantidad entera de veces en el dividendo y los términos de esta división son:

Dividendo, divisor y cociente

D → Dividendo
d → Divisor
q → Cociente

La relación entre los términos de la división exacta es:

$$D = d \cdot q$$

Así en la división:
 $123 \overline{) 41}$
 el objetivo es hallar una cantidad (cociente) que multiplicada con el divisor (41) dé el dividendo (123), el cociente es 3.



Inexacta

Cuando el divisor no está contenido un número exacto de veces en el dividendo y la operación tendrá un resto o residuo.

Por defecto

Al producto del divisor por el cociente le falta algo para ser igual al dividendo, la cantidad que falta se llama residuo por defecto.

- D → Dividendo
- d → Divisor
- q → Cociente
- R_d → Residuo

$$D = d \cdot q + R_d$$

En la división:
 $127 \overline{) 40}$
 al producto del divisor (40) y el cociente (3) le falta algo (residuo) para ser el dividendo (127), el residuo por defecto es 7.



Por exceso

El producto del divisor por el cociente se excedió del dividendo, la cantidad en que se excedió se llama residuo por exceso.

- D → Dividendo
- d → Divisor
- q + 1 → Cociente
- R_e → Residuo

$$D = d (q + 1) - R_e$$

En la división:
 $115 \overline{) 40}$
 el producto del divisor (40) y el cociente (3) se excedió (residuo) del dividendo (115), el residuo por exceso es 5.



Propiedades en la división inexacta

De los residuos

- El residuo es menor que el divisor

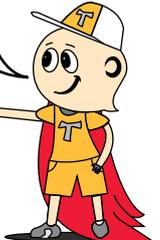
$$R < d$$

$$R_{\text{Máximo}} = d - 1 \wedge R_{\text{Mínimo}} = 1$$

- La suma de los residuos por defecto y exceso da el divisor

$$R_d + R_e = d$$

Así en la división inexacta:
 $D \overline{) 41}$
 sea por defecto o exceso, el residuo mínimo es 1 y el máximo es 40.



De los cocientes

Los cocientes por defecto y exceso son números consecutivos

➔ Ejemplos:

Dividir 97 entre 10

$$\begin{array}{r|l} \text{Por defecto} & \\ 97 & 10 \\ \hline R_d = 7 & q_d = 9 \\ 97 = 10(9) + 7 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{Por exceso} & \\ 97 & 10 \\ \hline R_e = 3 & q_e = 10 \\ 97 = 10(10) - 3 & \end{array}$$

- Los cocientes son consecutivos

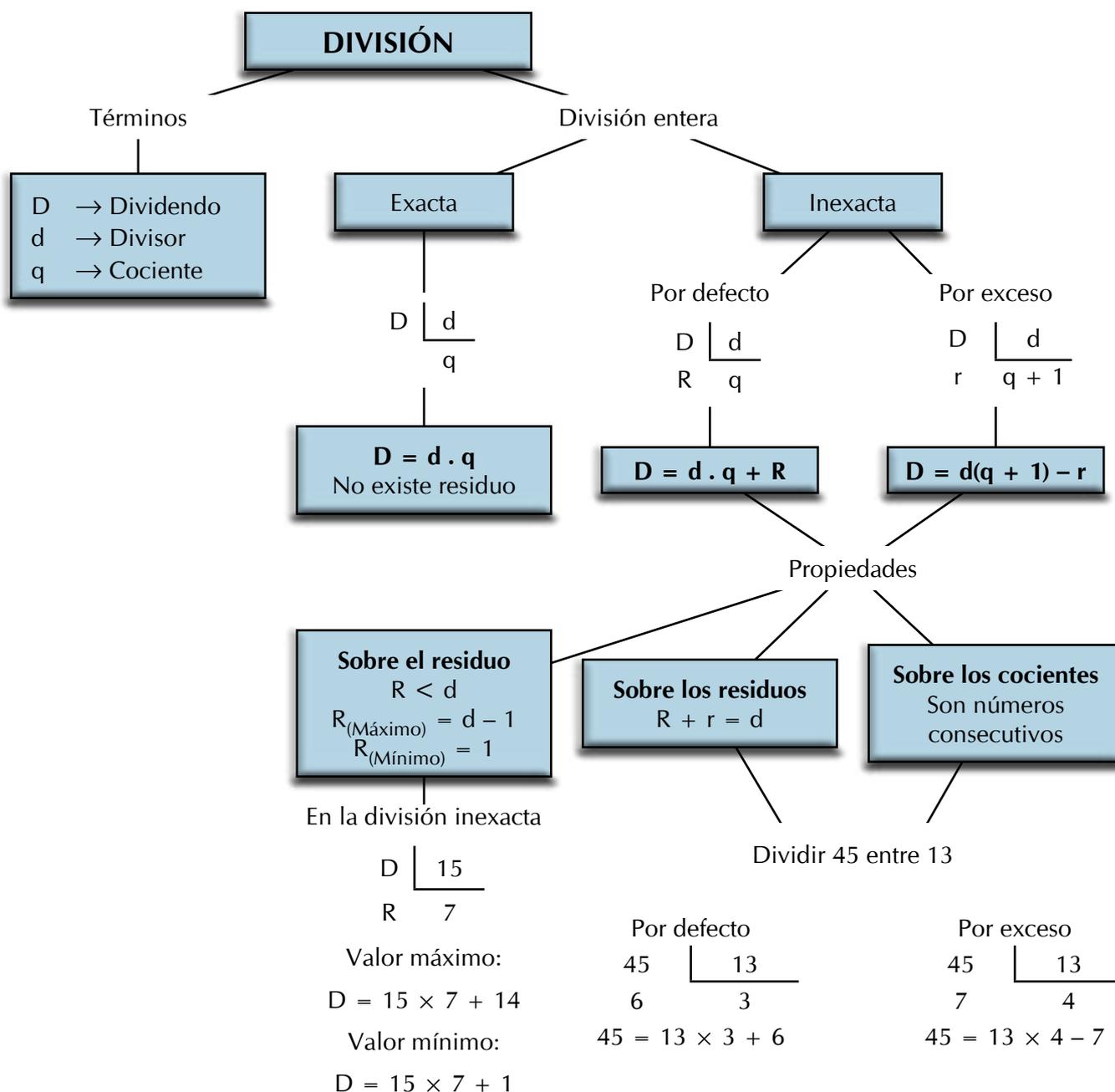
$$q_d = 9$$

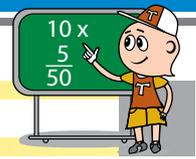
$$q_e = 10$$

- La suma de los restos es igual al divisor

$$r_d + r_e = 10$$

Síntesis teórica





Aplica lo comprendido

1. Identifica los términos en la siguiente división:

$$\begin{array}{r} 87 \overline{) 10} \\ 7 \quad 8 \end{array}$$

Divisor = Cociente =
Residuo = Dividendo =

2. Completa la siguiente división por exceso:

$$79 \overline{) 11}$$

Luego, identifica los términos:

Cociente = Residuo =

3. En las siguientes divisiones:

$$\begin{array}{r} 87 \overline{) 10} \\ 3 \quad 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 87 \overline{) 10} \\ 7 \quad 8 \end{array}$$

Identifica los términos:

Dividendo =
Divisor =
Cociente por defecto =
Cociente por exceso =
Residuo por defecto =
Residuo por exceso =

4. Completa la siguiente división inexacta, si el cociente es 8 y el residuo es mínimo.

$$\begin{array}{r} \dots\dots\dots \overline{) 10} \\ \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \end{array}$$

5. Completa la siguiente división inexacta, si el cociente es igual que el residuo y el residuo es el máximo posible.

$$\begin{array}{r} \dots\dots\dots \overline{) \dots\dots\dots} \\ 16 \quad \dots\dots\dots \end{array}$$



Aprende más

- ¿Cuál es el cociente de dividir \overline{ababab} entre \overline{ab} ?
- ¿Cuántas cifras cinco como mínimo debe tener el número 555 ... para que al dividirse entre 41 la división sea exacta?
- En una división entera inexacta, el divisor y el cociente valen 17. ¿Cuál es el dividendo, si el residuo es mínimo?
- En una división entera, el divisor es 15, el residuo es máximo y el cociente es 9. ¿Cuál es el dividendo?
- En una división entera inexacta, el divisor es 23, el cociente y el residuo son iguales. Hallar el dividendo, si el residuo es máximo.
- Al dividir 123 entre 13, la suma de los cocientes por defecto y exceso es:
- Hallar el dividendo de una división en la cual el divisor es 20, el cociente 29 y el residuo la mitad del divisor.
- Hallar el dividendo de una división inexacta, donde el divisor es 48, el cociente por exceso es la mitad del divisor y el residuo por exceso es la mitad del cociente por exceso.
- En una división entera exacta, el dividendo es cinco veces el divisor. Si la suma de sus términos es 185, hallar el divisor.

- 10.** La diferencia de dos números es 308 y al dividirlos el cociente es 13 y el residuo 8. ¿Cuál es el menor número?
- 11.** En una división, el cociente es 21 y el residuo es 15. Si la suma del dividendo y el divisor es 829, hallar el divisor.
- 12.** La suma de dos números es 479. Si su cociente es 28 y el residuo el máximo posible, hallar el menor de los números.
- 13.** En una división, el divisor es de una cifra, el cociente 12 y el residuo 8. ¿Cuál es la suma de cifras del dividendo?
- 14.** ¿Cuántos números cumplen tal que al dividirlos entre 50, el residuo es el quíntuplo del cociente?
- 15.** ¿Cuántos números existen tal que al ser divididos entre 37, originan un residuo que es el quíntuplo del cociente?

Aplicación cotidiana

Según la norma UNE en ISO

Las escalas se escriben en forma de razón donde el antecedente indica el valor en el plano y el consecuente el valor real. Por ejemplo la escala 1:500, significa que 1 cm en el plano equivale a 500 cm reales.

Ejemplos: 1:1; 1:10; 1:500; 5:1; 50:1; 75:1

Una mesa de forma rectangular tiene como dimensiones a 3 m de largo por 2 m de ancho y 120 cm de altura.

- 16.** Si se tiene que dibujar en un plano a escala 1:40, ¿qué dimensiones debe tener?



¡Tú puedes!

- 1.** ¿Cuánto se le debe sumar al dividendo de una división cuyo divisor y residuo son 15 y 6, para que el cociente aumente en 3 y el resto sea máximo?
- a) 48 b) 50 c) 53 d) 57 e) 62
- 2.** El cociente y el resto en una división inexacta son 4 y 30 respectivamente y si se suman los términos el resultado es 574. Hallar el divisor.
- a) 438 b) 430 c) 108 d) 102 e) 170
- 3.** ¿Cuántos números menores que 400 pueden ser dividendo de una división cuyo cociente es 12 y cuyo resto es 14?
- a) 32 b) 31 c) 20 d) 18 e) 14
- 4.** En una división inexacta, el dividendo es un número mayor que 643, el divisor es 34 y el cociente 18. El resto por exceso podría ser:
- a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2
- 5.** Al dividir un número entre el C.A. de su C.A. se obtiene 42 de residuo. Hallar dicho número.
- a) 798 b) 978 c) 987 d) 877 e) 897



Practica en casa

1. En cierta división, el divisor y el cociente valen 17 y 11 respectivamente. Calcula el dividendo, si la división es exacta.
2. Divide 101 entre 17 y halle el resto por defecto y exceso.
3. ¿Cuál es el cociente de dividir $\overline{an0an0}$ entre \overline{an} ?
4. ¿Cuántas cifras cinco como mínimo debe tener el número 555... para que al dividirse entre 7, la división sea exacta?
5. Al dividir 1 205 entre 27, la diferencia de los residuos por defecto y exceso es:
6. Hallar el dividendo de una división, tal que el divisor es 20, el cociente 16 y el residuo la mitad del cociente.
7. En una división entera exacta, el dividendo es cuatro veces el divisor. Si la suma de los términos de la división es 184, hallar el divisor.
8. En una división entera inexacta, el divisor y el cociente son números consecutivos que suman 17. ¿Cuál es el dividendo, si el residuo es mínimo? (Cociente menor que el divisor)
9. En una división entera, el divisor es 17, el residuo es máximo y el cociente es 8. ¿Cuál es el dividendo?
10. En una división entera inexacta, el divisor es 17 y el cociente y el residuo son iguales. Hallar el dividendo, si el residuo es máximo.
11. En una división entera, el residuo es 12 y el cociente es 13. Calcular el dividendo, si el residuo es máximo.
12. Al dividir 227 entre 13, la suma de los cocientes por defecto y exceso es:
13. La diferencia de dos números es 146. Si al dividirlos el cociente es 15 y el residuo es 6, ¿cuál es el menor número?
14. En una división, el cociente es 17 y el residuo es 5. Si la suma del dividendo y el divisor es 761, hallar el divisor.
15. La suma de dos números es 479. Si su cociente es 18 y el residuo el máximo posible, hallar el menor de los números.

Complemento



Aprende más



- En la siguiente sustracción: $234 - 98 = 136$, si al sustraendo se le agrega 15 y al minuendo se le resta 32, ¿cuál es la nueva diferencia?
- En la siguiente multiplicación: $23 \times 45 = 1035$, si al multiplicando se le agrega 10 y al multiplicador se le resta 13, ¿en cuánto aumenta el producto?
- ¿Cuál es la suma de cifras del resultado de multiplicar \overline{bab} por \overline{mn} , si: $\overline{mn} \times a = 161$ y $\overline{mn} \times b = 207$?
- Al dividir 198 entre 13, el cociente es 15 y el residuo 3. Si al divisor le agregamos 2 y al dividendo se le resta 10, ¿cuál es el nuevo residuo?
- Al dividir un número entre \overline{ab} , el cociente es 12 y el residuo es 98. Hallar el dividendo.
- Al dividir \overline{abc} entre 23 por defecto, el cociente es 12 y el residuo 8. Determina la suma del cociente por exceso y el resto por exceso.
- Si: $a - b = 2$, hallar: $\overline{4a4b}_{(9)} - \overline{b5a}_{(9)}$
- Si \overline{abc} se multiplica por 17, el producto es $\overline{m182}$. Hallar "a + b + c".
- El cociente de dos números es 7 y su producto 50 575, ¿cuál es el mayor?
- Si: $\overline{mnp} \times m = 4\ 321$
 $\overline{mnp} \times n = 3\ 437$
 $\overline{mnp} \times p = 2\ 345$
 Determine " $\overline{mnp} \times \overline{pmn}$ " y dar como respuesta la suma de cifras del producto.
- El producto de dos números es 396. Si el multiplicador aumenta en dos unidades, el producto aumenta en 44 unidades. Hallar el multiplicando.
- En una división inexacta, el cociente es 10, el divisor es 9 y el residuo es el máximo posible. Hallar el dividendo.
- En una división entera el dividendo es 72. Hallar el divisor, sabiendo que el cociente y el residuo son iguales a 4.
- Si: $\overline{a0a} \times 26 = \overline{21mm8}$, hallar "m + a"
- Si el dividendo de una división es 1 081, el cociente y el residuo son iguales y el divisor es el doble del cociente, calcule el divisor.



Practica en casa



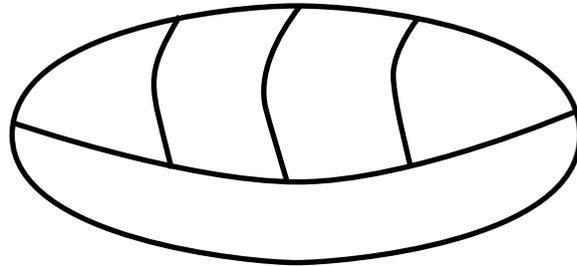
- En la siguiente sustracción: $234 - 98 = 136$, si al sustraendo se le resta 25 y al minuendo se le agrega 54, ¿cuál es la nueva diferencia?
- Hallar: $\underbrace{\text{CA}(\text{CA}(\text{CA}(\dots(\text{CA}(98\ 742)\dots)))}_{1081 \text{ veces}}$
- Si: $m - n = 5$, hallar: $\overline{4m5n}_{(7)} - \overline{2n6m}_{(7)}$
- Si \overline{abc} se multiplica por 27, el producto es $\overline{mn121}$. Hallar "a + b + c".
- El producto de $\overline{ab7}$ por 35 es $\overline{1m99m}$. Hallar "a + b + m".
- El cociente de dos números es 7 y su producto 7 168. ¿Cuál es el mayor?
- Si: $\overline{mnp} \times m = 1\ 041$
 $\overline{mnp} \times n = 1\ 388$
 $\overline{mnp} \times p = 2\ 429$
 Determine " $\overline{mnp} \times \overline{pmn}$ " y dar como respuesta la suma de cifras del producto.
- El producto de dos números es 621. Si el multiplicador aumenta en 3 unidades, el producto aumenta en 81 unidades. Hallar el multiplicando.

9. Al dividir 240 entre 13, el cociente es 18 y el residuo 6. Si al divisor le agregamos 3 y al dividendo se le resta 10, ¿cuál es el nuevo residuo?
10. Al dividir \overline{abc} entre 33, el cociente por defecto es 12 y el residuo por defecto es 8. Determina la suma del cociente por exceso y el resto por exceso.
11. En una división, el cociente es 12, el divisor es 19 y el residuo el máximo posible. Hallar el dividendo.
12. En una división, el cociente es 26, el divisor es 50 y el residuo la mitad del divisor. Hallar el dividendo.
13. Si: $\overline{a0a} \times 13 = \overline{m1m1}$, hallar "m + a".
14. ¿Cuál es el cociente de dividir $\overline{ab00ab0}$ entre \overline{ab} ?
15. ¿Cuántas cifras nueve como mínimo debe tener el número 999... para que al dividirse entre 73 la división sea exacta?

Cuatro operaciones combinadas

En este capítulo aprenderemos:

- A usar las cuatro operaciones combinadas para resolver problemas.



Esta figura es un cero, es el cero de la cultura maya.

En la prehistoria, la aritmética se limitaba al uso de números enteros, encontrados inscritos en objetos que indican una clara concepción de la suma y resta; el más conocido es el hueso Ishango de África central, que data de entre 18 000 y 20 000 a.C.

Nicomachus de Gerasa (60 – 120 a.C.) resume la filosofía de Pitágoras enfocada a los números, y sus relaciones, en su introducción a la Aritmética. En esa época, las operaciones aritméticas básicas eran muy complicadas, hasta que comenzó a utilizarse el “método de los indios” que se convirtió en la aritmética que hoy conocemos. La aritmética india era mucho más simple que la aritmética griega, debido a la simplicidad del sistema numérico indio que, además poseía el cero y una notación con valor numérico posicional. Los árabes aprendieron este método y lo llamaron hesab. Fibonacci (también conocido como Leonardo de Pisa) presenta el “método de los indios” en Europa en 1202. En la Edad Media, la aritmética es una de las siete artes liberales enseñada en las universidades.

En América, la matemática se desarrolló notablemente como se trasluce sobre todo a partir de recientes redescubrimientos. Noticias que nos han llegado a través de los principales cronistas, tanto españoles como mestizos, nos dan luz sobre la existencia y uso generalizado de una forma de ábaco, la yupana, cuyo uso estaría intensamente relacionado con el del kipu. Así pues hay fuertes indicadores que parecen decirnos que el kipu sería una forma matematizada de conservar las palabras.



En la ilustración podemos ver, de izquierda a derecha, ilustración del libro *Crónica y buen gobierno* de Guamán Poma de Ayala, en la parte inferior aparece una yupana, cuya utilidad algunos españoles, llegaron a conocer, pero que anclados, en sus prejuicios jamás llegaron a comprender; la segunda ilustración es una yupana encontrada entre los restos dejados de la cultura Tiahuanaco, en Bolivia, observe cuidadosamente la coincidencia de los diseños entre la primera y la segunda. En el Perú también se han encontrado yupanas, tal como la que aparece en tercer lugar, observe la tridimensionalidad de esta yupana, el porque de esta tridimensionalidad no está comprendida aún. En los últimos tiempos vivimos una “resurrección de la yupana”, así en el último lugar, vemos una yupana de madera triplay, hecha recientemente.

- ¿Cómo sumarías 364 y 736, si no existiera un símbolo para el cero?

Saberes previos

Completa con números:

14 más 16 entre 2			Exceso de 78 sobre 49		Diferencia de 87 y 43	
Tres quince-nas			$8 - 3 \times 2$		Le falta 8 para ser 460	
			12 docenas			
			Cuadrado de 2×10			
		$54 + 30 \times 30$				$742 - 247$
		Medio centenar más 5				29×26
10 días en horas				Triple de 304		
4 más 10 entre 2				Mitad de 42 más 6		
	Capicúa de cuatro cifras				4 cientos	
	Capicúa de dos cifras				Capicúa	
48 entre 3 más 9				$20_{(7)}$		
23×4				Número par		
		$620_{(9)}$				C.A.(543)
		60 docenas				La suma de 54 y 73

$\overline{abcd}_{(n)}$ = Número representado en el sistema de numeración de base "n"

C.A.(N) = Complemento aritmético del número "N".

Conceptos básicos

Operaciones combinadas

El uso de las cuatro operaciones fundamentales en la solución de problemas es frecuente en la vida cotidiana.

Operaciones inversas

El objetivo es usar las operaciones inversas para determinar el valor del número antes de efectuada la operación.

➔ Ejemplos:

- ¿A qué número se le agrega 12 y se obtiene 40?

$$\boxed{?} + \boxed{12} = \boxed{40}$$

El número es 28, ¿cómo se determinó?

$$\boxed{40} - \boxed{12} = \boxed{28}$$

Se utilizó la operación inversa a la adición.

- Si a un número le agregamos 12, al resultado lo multiplicamos por 5 y a este nuevo resultado le restamos 13, obtenemos 87. ¿Cuál es el número original?

$$\boxed{?} + \boxed{12} \times \boxed{5} - \boxed{13} = \boxed{87}$$

Usando las operaciones inversas:

$$\boxed{87} + \boxed{13} \div \boxed{5} - \boxed{12} = \boxed{8}$$

Adición y sustracción

La idea es, si restamos la diferencia de los números a la suma, los números serían iguales.

➔ Ejemplos:

- Entre Carlos y José tienen 120 nuevos soles. Si Carlos tiene 20 nuevos soles más que José, ¿cuánto dinero tiene cada uno?

A la suma le restamos la diferencia y la mitad de este resultado es el menor

$$\text{José} = \frac{120 - 20}{2} = 50 \text{ y Carlos} = 50 + 20 = 70 \text{ nuevos soles}$$

- Alex nació cuando Milenka tenía 4 años y en este año la suma de sus edades es 40 años. ¿Cuáles son las edades?

La diferencia de las edades de Milenka y Alex siempre será 4 años.

A la suma le quitamos la diferencia y la mitad de esta es la edad de Alex

$$\text{Alex} = \frac{40 - 4}{2} = 18 \text{ y Milenka} = 18 + 4 = 22 \text{ años}$$

Suponer algo y luego corregir

También se le conoce como falsa suposición, la idea es suponer los números que cumplan una de las condiciones y luego comparar con el otro dato.

Adición y cociente

Suponer dos números que cumplan con el cociente, hallar la suma de ellos y comparar con la suma correcta

➔ Ejemplo:

- La suma de dos números es 24 y el cociente entre ellos es 3. ¿Cuáles son los números?
Si el menor fuese 1, el mayor sería 3 y la suma 4; pero la suma debe ser 24 (6 veces la suma supuesta)
Entonces las cantidades serán: $1(6) = 6$ y $3(6) = 18$.

Sustracción y cociente

Suponer dos números que cumplan con el cociente, hallar la diferencia de ellos y comparar con la diferencia correcta.

➔ Ejemplo:

- La diferencia de dos números es 20 y el cociente entre ellos es 5. ¿Cuáles son los números?
Si el menor es 1, el mayor será 5 y la diferencia 4; pero esta diferencia debe ser 20 (5 veces la supuesta)
Entonces las cantidades serán: $1(5) = 5$ y $5(5) = 25$

Adición, cociente y residuo

Si quitamos a la suma el residuo, el problema es resolver conociendo el cociente y la nueva suma, caso: Adición y cociente.

→ Ejemplo:

- La suma de dos números es 48 y al dividirlos, el cociente es 4 y el residuo 3. ¿Cuáles son los números?

A la suma le restamos 3 (residuo), entonces la división será exacta (cociente 4) y la suma será $48 - 3 = 45$.

Si el menor es 1, el mayor será 4 y la suma 5; pero la suma debe ser 45 (9 veces la supuesta), entonces los números son:

El número menor es: $1(9) = 9$ y el mayor: $4(9) + 3 = 39$

Sustracción, cociente y residuo

Si quitamos a la diferencia el residuo, el problema es resolver conociendo el cociente y la nueva diferencia, caso: Sustracción y cociente.

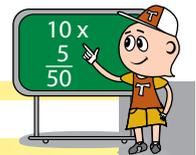
→ Ejemplo:

- La diferencia de dos números es 58 y al dividirlos el cociente es 6 y el residuo 3. ¿Cuáles son los números?

Si le restamos 3 a la diferencia, la división será exacta (cociente 6) y la sustracción $58 - 3 = 55$.

Si el menor es 1, el mayor será 6 y la diferencia es 5, pero la diferencia correcta es 55 (11 veces la supuesta)

Entonces el número menor es: $1(11) = 11$ y el mayor: $6(11) + 3 = 69$

**Aplica lo comprendido**

1. Si a un número de dos cifras, lo duplicamos, al resultado le agregamos 12, luego al nuevo resultado lo dividimos entre 3 y finalmente a este resultado le restamos 15, obtenemos 13. Hallar dicho número.
2. La suma de dos números es 56 y la diferencia de ellos es 12. Determina los números.
3. Entre Carlos y José tienen 180 soles. Si Carlos tiene 30 soles más que José, ¿cuánto dinero tiene cada uno?
4. La suma de dos números es 24 y el cociente entre ellos es 3. ¿Cuáles son los números?
5. La diferencia de dos números es 20 y el cociente entre ellos es 5. ¿Cuáles son los números?



Aprende más

1. Entre dos personas tienen S/. 3 000. Si la cantidad que tiene una de ellas es el triple de lo que tiene la otra, ¿cuál es la menor cantidad que tiene uno de ellos?
2. La suma de dos números es 472, su cociente es 5 y el resto 40. ¿Cuál es el menor número?
3. Dividir el número 555 en dos partes, tal que su diferencia sea 125. ¿Cuáles son los números?
4. Se repartieron 858 soles en partes iguales entre 37 pobres y sobraron 7 soles. ¿Cuánto le correspondió a cada uno?
5. ¿Cuánto tardarás en cortar una pieza de tela de 70 m de largo, en trozos de 10 m, si empleas 5 segundos en hacer cada corte?
6. El producto de tres números enteros consecutivos es igual a 35 veces el segundo. La suma de los números es:
7. De un salón "A" pasan al salón "B" 15 alumnos, luego del salón "B" pasan 20 alumnos al salón "A". Si al final "A" y "B" tienen 65 y 35 alumnos, ¿cuántos alumnos tenía inicialmente cada salón?
8. Un padre de 40 años, tiene dos hijos de 8 y 6 años. ¿Cuál será la edad del padre cuando la suma de las edades de los dos hijos sea 52 años?
9. Una persona deja al morir a cada uno de sus hijos 840 soles. Habiendo fallecido uno de ellos, la herencia de este se repartió entre los demás. Entonces cada hijo recibe 1 120 soles. ¿Cuál era la fortuna dejada?
10. Al término de una reunión, hubo 28 estrechadas de mano. Suponiendo que cada uno de los participantes fue cortés con cada uno de los demás, el número de personas presentes fue:
11. Un microbús parte de la plaza 2 de Mayo en dirección a Comas. Llega al paradero final con 53 pasajeros. Sabiendo que cada pasaje cuesta 3 soles y que ha recaudado en total 195 soles, ¿cuántos pasajeros partieron del paradero inicial, si además se sabe que en cada paradero por cada pasajero que bajaba subían tres?
12. Un comerciante compra libros a S/. 50 cada uno. Por cada docena le obsequian un libro, obteniéndose en total 780 libros. Si decide regalar 30 libros, ¿a qué precio debe vender cada libro para ganar S/. 6 000?
13. Se contrata a un empleado por el tiempo de 9 meses, prometiéndole pagar \$ 800 más un reloj. Pero al cabo de 5 meses se le despide, pagándole entonces \$ 200 más el reloj. Determine el precio del reloj.
14. Se han de repartir 160 caramelos entre 45 alumnos de un salón, dándole 3 caramelos a cada varón y 4 caramelos a cada niña. ¿Cuántas niñas hay en el aula?
15. El producto de dos factores es 2 184. Si el multiplicando aumenta en 5, el producto resulta 2 444. Hallar los dos factores e indicar la suma.



¡Tú puedes!

1. Enrique se ha cansado ya de su colección de posavasos y ha llamado a sus cinco sobrinos para repartirlos entre ellos. Si tiene 2 457 posavasos y uno de los sobrinos viene a la cita con dos amigos y Enrique decide incluirlos también en el reparto, ¿cuántos posavasos corresponden a cada niño?
 - a) 350
 - b) 351
 - c) 400
 - d) 382
 - e) 540

2. Tres amigos muy inquietos necesitan listones de madera para realizar una maqueta y han calculado que necesitan 14 metros en total para su proyecto. Acuden a la carpintería a pedir ayuda y les dicen que busquen entre los recortes porque han desechado pequeños listones de 30 cm de longitud. Anselmo encuentra 12 piezas, Bibiana 15 y Celia 8. ¿Cuántos centímetros de listones de madera necesitan aún para poder construir su maqueta?
- a) 200 cm b) 150 c) 250 d) 350 e) 300
3. Manuel y Teresa hacen pulseras muy originales. Las de Manuel son de cuero y las vende a cuatro euros cada una. Las de Teresa son de hilos de colores y las vende a tres euros la unidad. El sábado pasado, ella vendió 12 pulseras por la mañana y 5 por la tarde y él tuvo más suerte: vendió 15 por la mañana y 7 por la tarde. ¿Cuánto obtuvieron en total al terminar su jornada?
- a) S/. 120 b) 132 c) 139 d) 140 e) 145
4. He ahorrado durante mucho tiempo para comprar una colección de libros de literatura universal que cuesta 120 euros. Al romper mi alcancía he visto que ya tenía 85 euros y que me faltaba poco para conseguir la colección. Mi madre, muy acertadamente, me ha dicho que no destinase todos mis ahorros a los libros y que reservase 15 euros para imprevistos. Siguiendo el consejo de mi madre, ¿cuánto dinero necesito todavía para poder comprar mis libros?
- a) 40 euros b) 45 c) 35 d) 50 e) 60
5. Quiroz sigue empeñado en estudiar rectángulos. Ahora ha dibujado uno de 27 cm de base y 18 cm de altura pero no lo ha convencido demasiado y ha decidido agrandarlo. La base la ha aumentado en 5 cm y la altura en 8 cm. ¿Qué área tiene este último rectángulo?
- a) 840 cm^2 b) 832 c) 920 d) 846 e) 885



Practica en casa

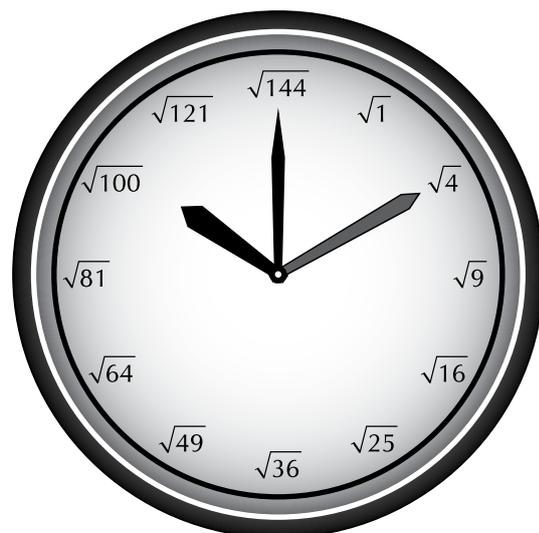
1. Un instituto decide comprar cuatro vídeos al precio de 68 soles cada uno. La secretaria comenta que disponen de un total de 575 soles para esta operación. ¿Cuánto dinero sobrá después de realizar la compra?
2. Al dividir dos números enteros se obtiene 11 de cociente y 39 de residuo. Hallar el dividendo, sabiendo que es menor que 500 o termina en 0 y es mayor que 400.
3. Una lata de sardinas pesa 360 g, pero con la mitad de su contenido pesa 200 g. ¿Cuánto pesa la lata?
4. En una reunión hay 83 personas y al bailar sobran 5 mujeres y 12 hombres. ¿Cuántas mujeres hay en la reunión?
5. Una correa con su hebilla cuestan S/. 24. Si la hebilla cuesta S/. 4 menos que la correa. ¿Cuánto cuesta la hebilla?
6. Tres hermanos: Juan, Pedro y Santiago recibieron una herencia de S/. 19 200. Según el testamento, Pedro recibiría S/. 1 500 más que Juan y Santiago S/. 1 200 más que Pedro, ¿cuánto recibió Pedro?
7. En un estanque se duplica inicialmente el número de peces que había en él. Luego se le agregan 55 peces obteniendo un total de 103 peces, ¿cuántos peces había al principio en el estanque?
8. Se duplica un número, luego se disminuye en 3 el producto y se duplica de nuevo esta diferencia, obteniéndose 102. ¿Cuál es el número original?
9. Por la venta de 400 papeletas se recaudaron \$ 650, una parte de las papeletas se vendió a \$ 1,50 y el resto a \$ 2,00. ¿Cuántas papeletas de uno y otro tipo se vendieron?

10. El ancho de un terreno rectangular es 30 m más corto que su largo. Si la longitud de la cerca que lo rodea es 240 m, ¿cuál es el área del terreno?
11. El último mes Pedro ganó \$ 250 de salario, incluyendo el pago por vinculaciones. El salario ascendió a \$200 más de lo recibido por vinculación. ¿Cuál es el salario básico de Pedro?
12. Un padre tiene 40 años y su hijo 9. ¿Dentro de cuántos años sus edades sumarán 75 años?
13. Víctor tiene 16 años y su padre 37. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre duplicará la de Víctor?
14. El cociente de la división entera de 97 por un cierto divisor es 4. Si el divisor supera en 3 unidades al resto, calcula el resto y el divisor.
15. La edad de un padre supera en 34 años a la de su hijo y dentro de 4 años ambas edades sumarán 66 años. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

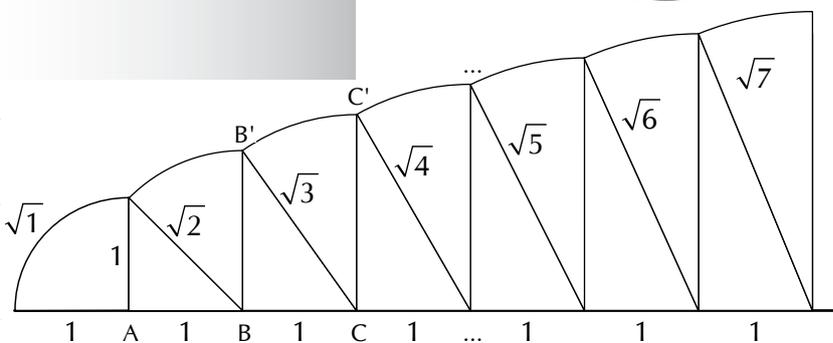
UNIDAD 5

Separar las cifras de dos en dos (la cantidad de grupos indica cuantas cifras enteras tiene la raíz). Aproximando la raíz del primer grupo ($\sqrt{9} = 3$). Bajamos el grupo que sigue y duplicamos 3, ahora aproximar la siguiente cifra de la raíz ($61 \times 1 = 61$). Nuevamente el mismo paso, para las siguientes cifras.

$\sqrt{9.87.65.43.21}$	31426,
$\underline{-9}$	$61 \times 1 = 61$
0 87	$624 \times 4 = 2496$
$\underline{-61}$	$6282 \times 2 = 12564$
26 65	$62846 \times 6 = 377076$
$\underline{-24 96}$	$62852 ? \times ? =$
1 69 43	
$\underline{-1 25 64}$	
43 79 21	
$\underline{-37 70 76}$	
6 08 4500	



Las potencias y raíces están presentes en nuestra vida y aparecen a cada instante: El reloj, de raíces cuadradas, figura superior, nos sirve para romper la monotonía de las horas. En la figura de la derecha, abajo, podemos ver de modo geométrico la generación de las "n" primeras raíces cuadradas. Para construir esta figura, se comienza trazando un cuadrado de lado 1, evidentemente la diagonal de este cuadrado mide $\sqrt{2}$. Luego con centro en "B" se traza un arco de circunferencia con radio $\sqrt{2}$. También sobre B, se traza la perpendicular hasta que corte el arco anteriormente trazado en B', seguidamente trazamos el triángulo B'BC, de base 1 y altura $\sqrt{2}$, la diagonal de este triángulo mide $\sqrt{3}$, del mismo modo proseguimos generando más triángulos.



de este triángulo mide $\sqrt{3}$, del mismo modo proseguimos generando más triángulos.

La raíz cuadrada

La raíz cuadrada de un número "x", es otro número "y", tal que multiplicado por sí mismo tenga como producto "x". Simbólicamente lo anterior se expresa así: $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow y^2 = x$.

La raíz cuadrada fue descubierta hace ya varios milenios y de por sí supuso un hito en la historia de la matemática. En el papiro de Ahmes aparece un método primitivo del cálculo de las raíces cuadradas. Sin embargo son los hindúes quienes dejan tratados en los que definen y establecen métodos para su cálculo. Recordemos que son los babilonios, quienes inventan el cero, que luego sería tomado por los hindúes y chinos. Luego de ello, todo lo parece indicar, los griegos, de algún modo (comercio principalmente), se hacen con estos conocimientos.

APRENDIZAJES ESPERADOS



Comunicación matemática

- Identificar los cuadrados y los cubos perfectos
- Utilizar aproximaciones para obtener las raíces
- Identificar los términos de la potenciación
- Identificar los términos de la radicación

Razonamiento y demostración

- Utilizar los criterios de exclusión.
- Usar las propiedades para reconocer los cuadrados perfectos.
- Deducir las propiedades de la raíz cuadrada inexacta.

Resolución de problemas

- Usar las aproximaciones para obtener un cuadrado o cubo perfecto.
- Usar las aproximaciones para obtener la raíz de un número.

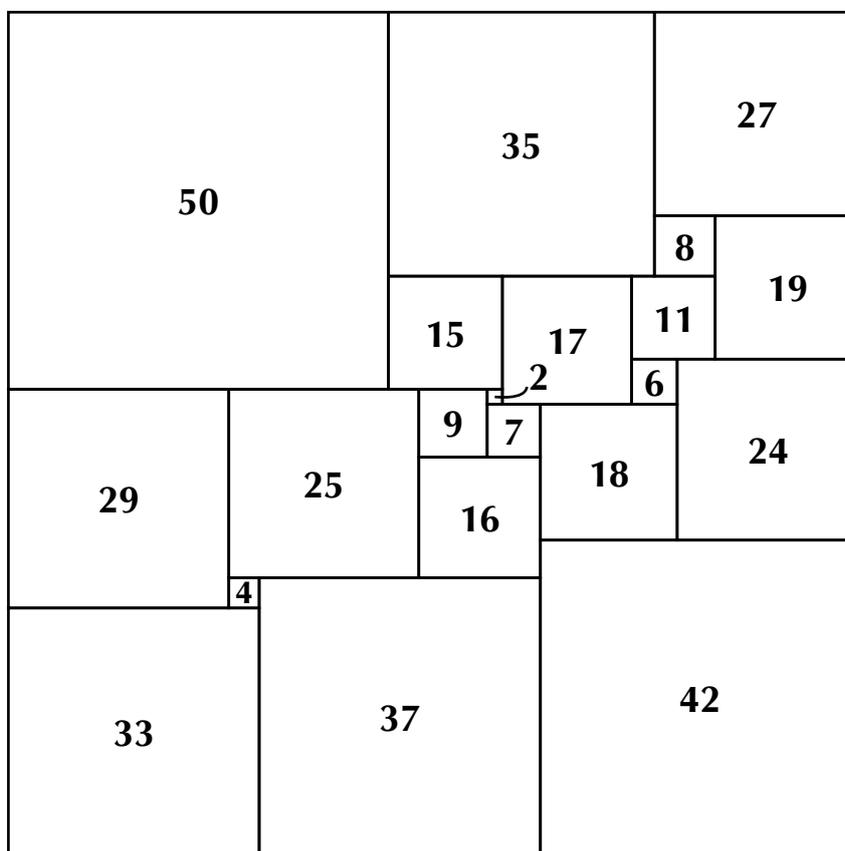
Potenciación

En este capítulo aprenderemos:

- A identificar los cuadrados y cubos perfectos
- A identificar los términos de la potenciación
- A utilizar los criterios de exclusión.

Cuadratura del cuadrado

El problema consiste en diseccionar o dividir un cuadrado en otros más pequeños. El caso más estudiado es el de la “cuadratura del cuadrado perfecto”, con la restricción de que todas las plazas o cuadrados deben de tener diferente tamaño, y dentro de este un “cuadrado simple” sería aquel en el que ningún subconjunto de plazas forma a su vez otro cuadrado.



La cuadratura del cuadrado perfecto simple (o algo así) más pequeña de orden 21 fue descubierta en 1978 por A.J.W. Duijvestijn.

- ¿Cuál es el lado del cuadrado perfecto simple?
- ¿Cuántos cuadrados de lados enteros están dentro del cuadrado perfecto simple?

Saberes previos

Completa con números:

			# cuadrado perfecto			Cubo de 6
			Cubo de 7			Quinta potencia de 2
	Número par	Una mano				
	131×11	Cuadrado de 19				
Cuadrado de 35				Sexta potencia de 2		
Cuadrado de 12				Doble de 31		
				Cuadrado de 18		Cubo de 3
				Cubo de 8		5 a la cuarta
		Dos docenas	Cuadrado de 24			
		$1 + 2 + 3 + \dots + 9$	Raíz cuadrada de 900			
Medio centenar					Raíz cuadrada de 4	
Cubo de 11					Cuadrado de 5	
	Cuadrado de 10, más 2					
	$1 \times 2 \times 3$					

Conceptos básicos

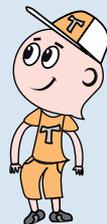
Potenciación

Se deriva de la multiplicación de un número por sí mismo varias veces.

$$\begin{array}{c} \text{Exponente} \\ \downarrow \\ \text{Base} \rightarrow b^n = P \leftarrow \text{Potencia} \end{array}$$

Recuerda que...

$$b^n = \underbrace{b \times b \times b \times \dots \times b}_{\text{"n" veces}}$$



Cuadrado perfecto

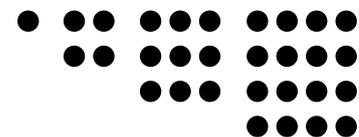
Cuando el exponente es 2 o 2°

$$N = k^2$$

Los primeros números cuadrados perfectos son: 1; 4; 9; 16; 25; ...



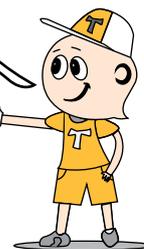
Cuadrados perfectos:



Criterios de exclusión

- Los números que terminan en 2; 3; 7 y 8 no son cuadrados perfectos.

Los cuadrados perfectos 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; ... pueden terminar en 0; 1; 4; 5; 6 y 9

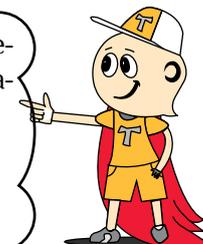


- Los números que terminan en una cantidad impar de ceros no son cuadrados perfectos.

También se aplica para números de más cifras, así para hallar el cuadrado de 995:

$$99 \times 100 = 9\,900 \text{ y } 5^2 = 25$$

$$\text{Entonces: } 995^2 = 990\,025$$



Propiedades

- Los exponentes de la descomposición canónica de un número que es cuadrado perfecto son pares.

$$1\,600 = 2^6 \times 5^2 = (2^3 \times 5)^2$$

- El cuadrado de un número que termina en 5

$$\overline{a5^2} = \overbrace{\dots\dots\dots} 25$$

↓

$$a(a + 1)$$

➔ Ejemplo:

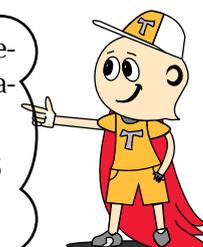
$$75^2 = 5\,625$$

Porque: $7 \times 8 = 56 \text{ y } 5^2 = 25$

También se aplica para números de más cifras, así para hallar el cuadrado de 995:

$$99 \times 100 = 9\,900 \text{ y } 5^2 = 25$$

$$\text{Entonces: } 995^2 = 990\,025$$



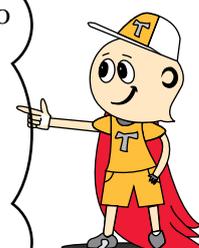
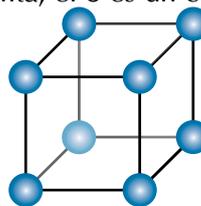
Cubo perfecto

Cuando el exponente es 3 ó $\overset{\circ}{3}$.

$$N = k^3$$

Los primeros cubos perfectos son: 1; 8; 27; 64; ...

Si cada unidad se representa como una bolita, el 8 es un cubo perfecto:



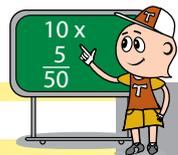
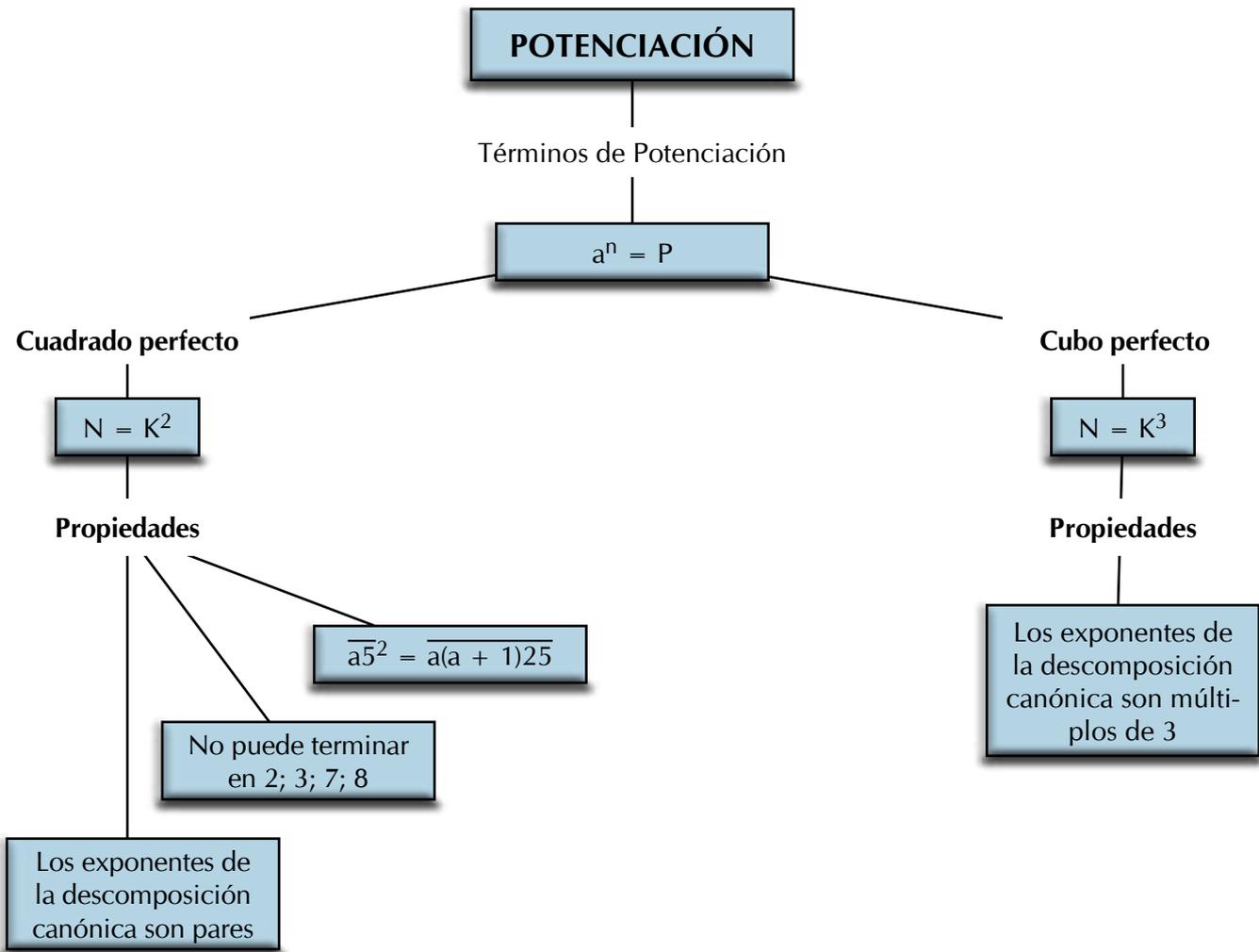
Propiedad

En la descomposición canónica de un cubo perfecto, los exponentes son múltiplos de 3.

$$64\,000 = 2^9 \times 5^3 = (2^3 \times 5)^3$$



Síntesis teórica



Aplica lo comprendido

1. Calcula:
 - $2\ 000^2 =$
 - $300^2 =$
 - $70^2 =$
 - $12\ 000^2 =$
2. Los números de dos cifras que son cubos perfectos son:
3. Determina las siguientes potencias:
 - $11^2 =$
 - $111^2 =$
 - $1\ 111^2 =$
 - $11\ 111^2 =$
4. Escribe los tres primeros números que sean cubos y cuadrados perfectos a la vez.
5. Calcula:
 - $15^2 =$
 - $35^2 =$
 - $65^2 =$
 - $85^2 =$
 - $95^2 =$



Aprende más



- ¿Cuántos cuadrados perfectos son de tres cifras?
- ¿Cuántas cifras tiene el cuadrado de 95 000 000?
- ¿Cuántos cubos perfectos son de tres cifras?
- Determine "a + b + c", si: $995^2 = \overline{aa00bc}$.
- Calcular "a + b + m", si: $\overline{4m^2} = \overline{ab01}$.
- Determina la suma de las cifras del cuadrado de:
 $\underbrace{11 \dots\dots 1}_{5 \text{ cifras}}$.
- Determina la cantidad de cifras del cuadrado de:
 $\underbrace{90 \dots\dots 0}_{15 \text{ cifras}}$.
- Determina la cantidad de cifras del cubo de:
 $\underbrace{40 \dots\dots 0}_{10 \text{ cifras}}$.
- Si: $\overline{\dots x^2} = \dots 4$, la suma de los valores que puede tomar "x" es:
- Si: $\overline{\dots x^3} = \dots 7$, hallar el valor de "x".
- ¿Por cuánto se le debe multiplicar como mínimo a $2^5 \times 3^7 \times 7^6$ para ser un cuadrado perfecto?
- ¿Por cuánto se le debe multiplicar como mínimo a $2^5 \times 3^7 \times 7^6$ para ser un cubo perfecto?
- ¿Por cuánto se le debe multiplicar como mínimo a 12 000 para que se convierta en un cuadrado perfecto?
- ¿Por cuánto se le debe multiplicar como mínimo a 6! para obtener un número cuadrado perfecto?
- ¿Por cuánto se le debe multiplicar como mínimo a 6! para obtener un número cubo perfecto?

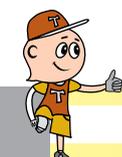
Aplicación cotidiana

Las memorias son potencias de 2

Las unidades de memoria USB siguen su camino a la grandeza, pero me refiero a su capacidad de almacenamiento que cada vez es mayor. Ha sido Kingston la primera en anunciar una Data Traveler de 128 GB. Solo el tiempo hará que la demanda y el acceso a los precios permita cambiar los USB de 4 y 8 GB.



- ¿Qué potencia de 64 kB es 128 GB?



¡Tú puedes!



- Hallar la raíz cuadrada de 1 164 241 y dar como respuesta la suma de sus cifras.
 - 16
 - 17
 - 18
 - 19
 - 21
- ¿Cuántos números cuadrados perfectos tienen cinco cifras?
 - 316
 - 216
 - 215
 - 217
 - 218
- Indicar el residuo de la raíz cuadrada de 8 366 557.
 - 2 800
 - 2 893
 - 3 564
 - 9 800
 - 7 566

4. ¿Cuántos números cuadrados perfectos hay entre 225 y 15 625?
 a) 108 b) 109 c) 110 d) 111 e) 112
5. ¿Cuántos cuadrados perfectos de la forma $\overline{6abc1}$ existen?
 a) 3 b) 4 c) 8 d) 10 e) 6



Practica en casa

- ¿Cuántos números menores que 100, son cuadrados perfectos?
- ¿Cuántos cuadrados perfectos son de dos cifras?
- ¿Cuántos cubos perfectos son de dos cifras?
- Determina la suma de las cifras del cuadrado de 111 111.
- Determina la cantidad de cifras del cuadrado de:

$$\underbrace{90 \dots\dots 0}_{12 \text{ cifras}}$$
- Determina la cantidad de cifras del cubo de:

$$\underbrace{20 \dots\dots 0}_{15 \text{ cifras}}$$
- Si: $\overline{\dots x^2} = \dots 9$, la suma de los valores que puede tomar "x" es:
- Si: $\overline{\dots x^3} = \dots 9$, hallar el valor de "x".
- ¿Cuántos cubos perfectos son menores que 1 000?
- ¿Por cuánto se le debe multiplicar como mínimo a $2^5 \times 3^7 \times 7^5$ para ser un cuadrado perfecto?
- ¿Por cuánto se le debe multiplicar como mínimo a $2^5 \times 3^7 \times 7^4$ para ser un cubo perfecto?
- ¿Por cuánto se le debe multiplicar como mínimo a 18 000 para que se convierta en un cuadrado perfecto?
- Si: $\overline{ab^3} = \overline{1c8a4}$, calcular "a + b"
- Si: $\overline{ab^2} = \overline{ba9}$, calcular "a + b"
- ¿Por cuánto se le debe multiplicar como mínimo a $2^4 \times 3^5 \times 7^6 \times 11$ para ser un cuadrado perfecto?

Radicación

En este capítulo aprenderemos:

- A identificar los términos de la radicación.
- A deducir las propiedades de la raíz cuadrada inexacta.

Cálculo de raíces

Las raíces cuadradas son el resultado de plantear problemas geométricos como la longitud de la diagonal de un cuadrado y surgieron ya en la antigüedad. El Papiro de Ajmeed datado en 1650 a. C., que copia textos más antiguos, muestra cómo los egipcios extraían raíces cuadradas. En la antigua India, el conocimiento de aspectos teóricos y aplicados del cuadrado y la raíz cuadrada fue al menos tan antiguo como los Sulba Sutras, fechados alrededor del 800-500 a. C.

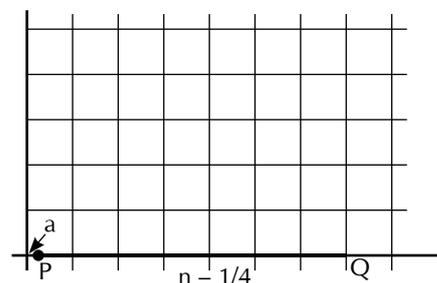
$\begin{array}{r} \sqrt[3]{17\ 580} \\ -8 \\ \hline 9\ 580 \\ -9\ 576 \\ \hline 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 26 \\ \hline 300 \times 2^2 \times 7 = 8400 \\ 30 \times 2 \times 7^2 = 2940 \\ \quad 7^3 = \quad 343 \\ \hline = 11683 \quad \text{No} \\ \hline 300 \times 2^2 \times 6 = 7200 \\ 30 \times 2 \times 6^2 = 2160 \\ \quad 6^3 = \quad 216 \\ \hline = 9576 \quad \checkmark \end{array}$
--	---

Un método para encontrar las raíces cúbicas es:

Cálculo gráfico de la raíz cuadrada de un número "n" cualquiera:

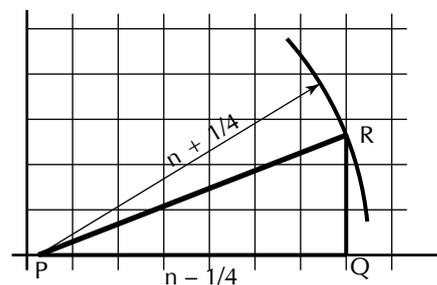
Emplear papel milimetrado, o preparar un cuadrículado. Mientras más grande el ojo de la cuadrícula, mejor.

1. Sobre el eje x de coordenadas determinamos P, a una distancia igual a $1/4$ de unidad del origen, luego trazamos \overline{PQ} de longitud igual a " $n - 1/4$ ", " n " es el número del cual queremos calcular la raíz.
2. Con centro en P y radio igual a " $n + 1/4$ ", trazamos un arco de circunferencia, tal que se corte con la perpendicular levantada sobre Q. La distancia PQ es la raíz buscada



Demostración

Trazamos el segmento $\overline{PQ} = n$ sobre el eje de las abscisas. P está a una distancia " $a = 1/4$ " del origen. Con centro en P, trazamos el arco de circunferencia de radio " $n + a$ ", Q es el punto de intersección entre este arco de circunferencia y la vertical trazada sobre R. El triángulo PQR es recto.



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$PQ^2 = PR^2 + QR^2$, del gráfico vemos que:

$$(n + a)^2 = (n - a)^2 + QR^2 \Rightarrow (n + a)^2 = (n - a)^2 + QR^2 \Rightarrow 4na = QR^2$$

Por comodidad escogemos, $a = 1/4$, tendríamos que $n = \overline{QR}^2$, es decir $\overline{QR} = \sqrt{n}$.

(Sobre la base de un artículo aparecido en la Revista do Professor do Matemática de Brasil, escrito por José Luiz Pastore Mello).

- ¿Cómo hallarías la raíz cúbica de 123 345?



Saberes previos

Completa con números:

			Potencia de 2 33×29	Número cubo perfecto	Cuadrado de 3 Capicúa múltiplo de 4 007	
Cubo perfecto						
Cubo de 41						
Raíz cuadrada de 4		Cuadrado de 9				Cuadrado perfecto
Cuadrado de 35		Cubo de 8				Número capicúa
	Número capicúa					
	Cuadrado de 26					
		Potencia de 2	Cubo de 9			
		Cuarta perfecta	Cuadrado de 5			
	91 al cuadrado					
	Cuadrado y cubo perfecto					
				Cuadrado de 5		
				Número capicúa		



Conceptos básicos

Radicación

Es la operación inversa a la potenciación.

$$\begin{array}{c} \text{Índice} \rightarrow \sqrt[n]{N} = k \leftarrow \text{Raíz} \\ \uparrow \\ \text{Radicando} \end{array}$$

Raíz cuadrada

Cuando el índice de la raíz es 2

Raíz cuadrada exacta

$$\sqrt{N} = k \quad \text{Tal que: } N = k^2$$

"N" es un cuadrado perfecto

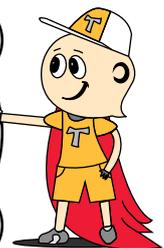
➔ **Ejemplo:**

Determina la raíz cuadrada de 2 209

$$\sqrt{2\,209} = 47$$

El número 15 876 es un cuadrado perfecto, su raíz cuadrada es:

La raíz de 158 = 12 (aprox.) Un k^2 que termine en 6 es 4 o 6. Entonces la raíz será 124 o 126. Comprobando: $\sqrt{15876} = 126$



Raíz cuadrada inexacta

Cuando el radicando no es un cuadrado perfecto

Por defecto

$$\sqrt{N} \begin{array}{l} k \\ R \end{array}$$

$$N = k^2 + R$$

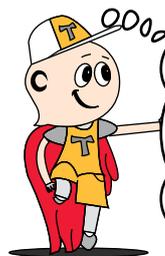
Por exceso

$$\sqrt{N} \begin{array}{l} k+1 \\ r \end{array}$$

$$N = (k+1)^2 - r$$

→ Ejemplos:

- La raíz cuadrada de 78
Buscamos cuadrados perfectos que estén cerca de 78: $8^2 = 64$ y $9^2 = 81$
Entonces: $78 = 8^2 + 14$ \wedge $78 = 9^2 - 3$



Todo número que no es cuadrado perfecto, siempre estará comprendido entre dos cuadrados perfectos, las raíces de ellos son las raíces por defecto y exceso.

Las raíces por defecto y exceso son 8 y 9 con sus respectivos residuos 14 y 3

- La raíz cuadrada de 168
Buscamos cuadrados perfectos que estén cerca de 168: $12^2 = 144$ \wedge $13^2 = 169$
 $\sqrt{168} = 12^2 + 24 = 13^2 - 1$

La raíz cuadrada de 168 por defecto es 12 y por exceso 13, el residuo por defecto 24 (residuo máximo) y el residuo por exceso 1.

Propiedades

- La raíz cuadrada tiene la mitad de cifras del radicando.
- El resto máximo en una raíz cuadrada es el doble de la raíz por defecto.



$$\sqrt{106276} = 326$$

$$\sqrt{68121} = 261$$

$$\sqrt{N} \begin{array}{l} k \\ R \end{array}$$

$$1 < R < 2k + 1$$

- Las raíces por defecto y exceso son números consecutivos
- La suma de los restos por defecto y exceso es igual al doble de la raíz por defecto más uno

$$\sqrt{N} \begin{array}{l} k \\ R \end{array}$$

$$N = k^2 + R$$

$$\sqrt{N} \begin{array}{l} k+1 \\ r \end{array}$$

$$N = (k+1)^2 - r$$

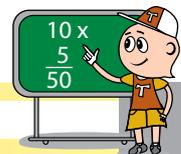
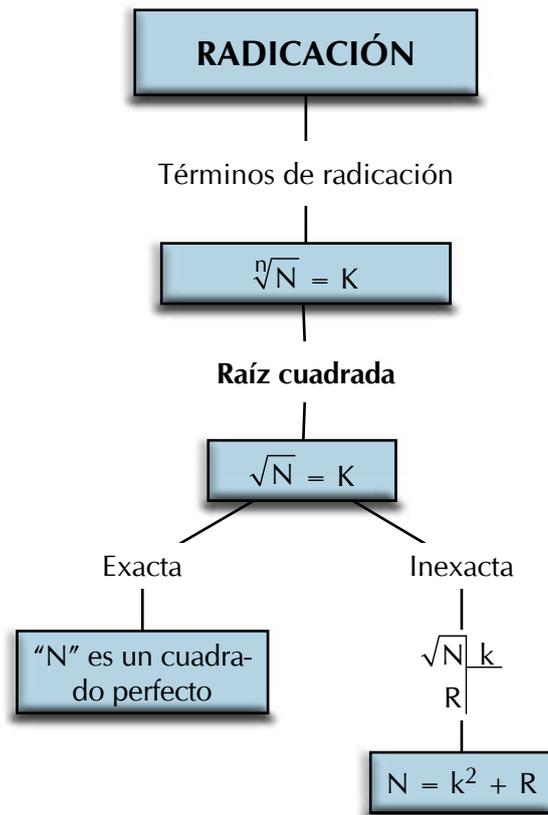
Igualando: $k^2 + R = (k+1)^2 - r$

y reduciendo:

$$R + r = 2k + 1$$



Síntesis teórica



Aplica lo comprendido

1. Calcular la raíz cuadrada de: $2^4 \times 5^2 \times 3^2$.
2. Calcular la raíz cuadrada de: $4^3 \times 5^2 \times 9^3$.
3. Calcular la raíz cuadrada de:
 - 4 096
 - 6 561
 - 2 401
 - 1 024
 - 1 089
4. La raíz cuadrada de 90 es:
5. Operar:
 - $\sqrt{64} \cdot \sqrt{49} - \sqrt{81} \cdot \sqrt{36}$
 - $\sqrt{196} + \sqrt{169} + \sqrt{225}$
 - $\sqrt{7225} - \sqrt{5625}$



Aprende más

1. Calcular la raíz cuadrada de 1 764.
2. Hallar la raíz cuadrada de $\overline{4aa5}$, si es un cuadrado perfecto.
3. Calcula el resto que se obtiene al extraer la raíz cuadrada de 125.
4. Calcula el residuo de la raíz cuadrada de 250.
5. Calcular la raíz de $\overline{7aa5}$, si es un cuadrado perfecto.
6. Si el número 13 456 es un cuadrado perfecto, ¿cuál es la suma de cifras de su raíz cuadrada?
7. Calcular el residuo que se obtiene al extraer la raíz cuadrada de 200.
8. Determina el residuo al extraer la raíz cuadrada de 125.
9. Determina la raíz cuadrada de 300.
10. Determina la raíz cuadrada de 2 130.

11. Determina la raíz cuadrada de 4 500.
12. ¿Cuántos números cuadrados perfectos tienen cuatro cifras?
13. ¿Cuántos números de tres cifras terminados en 1 son cuadrados perfectos?
14. Si la raíz cuadrada de un número es 23 y el resto es máximo, ¿cuál es la suma de cifras del radicando?
15. ¿Cuántos números de cuatro cifras terminados en 6 son cuadrados perfectos?



¡Tú puedes!



1. Calcular la suma de cifras de $\overline{3abcd0}$, si es un cubo perfecto.
 - a) 10
 - b) 15
 - c) 16
 - d) 17
 - e) 18
2. Si el número $\overline{2abcdef0}$ es quinta perfecta, la suma de cifras de la raíz quinta de dicho número es:
 - a) 4
 - b) 5
 - c) 6
 - d) 7
 - e) 3
3. La suma de un número, su raíz cuadrada y el residuo que es máximo, suman 234. Halle el número.
 - a) 186
 - b) 196
 - c) 204
 - d) 185
 - e) 195
4. Hallar un cuadrado perfecto de la forma \overline{abcd} , sabiendo que \overline{ab} y \overline{cd} también son cuadrados perfectos. Dar como respuesta la suma de sus cifras.
 - a) 15
 - b) 16
 - c) 17
 - d) 18
 - e) 20
5. Si el número: $N = \overline{1aaa}$ es un cuadrado perfecto, ¿cuál es el valor de "a"?
 - a) 1
 - b) 4
 - c) 5
 - d) 6
 - e) 9



Practica en casa



1. Calcular la raíz cuadrada de 1 296.
2. Hallar la raíz cuadrada de $\overline{5ab5}$, si es un cuadrado perfecto.
3. Calcula el resto que se obtiene al extraer la raíz cuadrada de 205.
4. Calcula la raíz cuadrada de 350.
5. ¿Por cuánto se le debe multiplicar como mínimo a 9 000 para que se convierta en un cuadrado perfecto?
6. Calcular el residuo que se obtiene al extraer la raíz cuadrada de 280.
7. Calcular la raíz cuadrada de 450.
8. Determina la raíz cuadrada de 135.
9. Determina la raíz cuadrada de 500.
10. Determina la suma de la raíz y el residuo que se obtiene al extraer la raíz cuadrada de 456.
11. Si $\overline{4aa5}$, es un cuadrado perfecto, hallar "a".
12. Calcular el residuo que se obtiene al extraer la raíz cuadrada de 959.
13. Calcular el residuo que se obtiene al extraer la raíz cuadrada de 500.
14. Determina la raíz cuadrada de 1 025.
15. Determina el residuo de la raíz cuadrada de 1 300.

Repaso



Aprende más

1. Efectuar: $1312_{(7)} - 443_{(7)}$.
2. Determina la raíz cuadrada por defecto de 1 230.
3. La suma de los términos de una sustracción es 1 026 y el minuendo es el triple del sustraendo. ¿Cuál es la diferencia?
4. Si el complemento aritmético de \overline{abcd} es $\overline{bcd4}$, entonces "a + b + c + d" es:
5. Hallar "x + y", si: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xy2}$.
6. ¿Cuál es la suma de cifras del cuadrado de 295?
7. El producto de 7 por "N" es un número formado solo por cifras 4. ¿Cuál es la suma de cifras del menor valor de "N"?
8. Si multiplicamos \overline{abc} por 9 999 se obtiene como producto ...315. Hallar "a + b + c".
9. En una división entera inexacta, el divisor y el cociente valen 13, ¿cuál es el dividendo, si el residuo es máximo?
10. Hallar un número de tres cifras, sabiendo que si se le agrega 240 resulta el triple de su complemento aritmético. Dar la suma de sus cifras
11. El número de tres cifras que restado de su complemento aritmético da 264 es:
12. El producto de dos números impares consecutivos es 323. Hallar la suma de los números.
13. El producto de dos números es 456. Si añadimos 6 unidades al multiplicando, entonces el producto es 600. ¿Cuál es el multiplicador?
14. El número $\overline{abc0}$, es el mayor cubo perfecto, ¿cuál es la suma de sus cifras?
15. ¿Por cuánto se le debe multiplicar como mínimo a 24 000 para que se convierta en un cuadrado perfecto?

Practica en casa



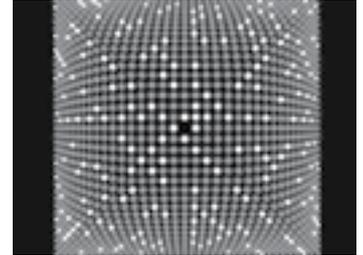
1. Al restar \overline{abc} y \overline{cba} se obtiene una diferencia que se encuentra entre 300 y 400. ¿Cuál es la suma de las dos cifras de menor orden de la diferencia?
2. El número 54 756 es un cuadrado perfecto, ¿cuál es la suma de cifras de su raíz cuadrada?
3. Calcular el residuo que se obtiene al extraer la raíz cuadrada de 3 180.
4. Calcular:
 $C.A.(2) + C.A.(4) + C.A.(6) + \dots + C.A.(10)$
5. Si el complemento aritmético de \overline{abcd} es $\overline{a(a-1)(a-2)}$, hallar "a + b + c + d".
6. Al multiplicar \overline{ab} por \overline{mnp} , los productos parciales son 203; 145 y 261, ¿cuál es la suma de las cifras del producto, si es el máximo posible?
7. Calcular "a + b + c", si al multiplicar $\overline{2abc}$ por 23, el producto termina en 457.
8. Calcular el residuo por exceso al extraer la raíz cuadrada de 4 200.
9. Determina la suma de los residuos por defecto y exceso de la raíz cuadrada de 4 125.
10. Determina la suma de las raíces cuadradas por defecto y exceso de 4 300.
11. En una división inexacta, el divisor es 26 y el residuo es el triple del cociente. ¿Cuántos valores puede tomar el dividendo?
12. El residuo de una división inexacta es 7, el cociente es 12 y el divisor es un número de una cifra. ¿Cuántos valores puede tomar el dividendo?
13. ¿Por cuánto se le debe multiplicar como mínimo a $2^5 \times 3^7 \times 7^5$ para ser un cuadrado perfecto?
14. Calcular "a + b", si $\overline{5ab5}$ es un cuadrado perfecto.
15. Víctor tiene 16 años y su padre 37. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre duplicará la de Víctor?

UNIDAD 6



197	196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186	185	184	183
198	145	144	143	142	141	140	139	138	137	136	135	134	133	182
199	146	101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	132	181
200	147	102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90	131	180
201	148	103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89	130	179
202	149	104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88	129	178
203	150	105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87	128	177
204	151	106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86	127	176
205	152	107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85	126	175
206	153	108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84	125	174
207	154	109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83	124	173
208	155	110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	123	172
209	156	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	171
210	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225

Eratóstenes de Cirene, fue el primero de los matemáticos, hasta donde se sabe, que se ocupó de encontrar un algoritmo capaz de calcular los números primos. Como se anota en la parte inferior, el ofreció como resultado su famosa Criba. Sin embargo lo único cierto es que encontrar la "regla de formación" de la secuencia de los números primos, ha escapado a los esfuerzos de muchos matemáticos. Sin embargo recientes descubrimientos hacen pensar que la solución de este problema está cerca. La figura de puntos y la matriz numérica sobre esta leyenda son espirales numéricas, como se puede ver en ellas los números primos están resaltados, sugiriendo una "regla de formación". Obs.: La diferencia entre las dos espirales numéricas es que en la imagen de puntos, el punto correspondiente al número 1 esta desplazado a la derecha una posición.



Teoría de los números

¿El colador de Eratóstenes?

Se trata de un algoritmo eficiente para calcular los primos y también se le conoce como la Criba de Eratóstenes. Su filosofía es muy sencilla, ya que se basa en ir tachando los números compuestos hasta que en un momento dado podemos garantizar que todos los que quedan son primos. ¿Cómo? es muy simple. Supongamos que queremos calcular todos los primos menores que "N". Hacemos una lista con todos los números naturales entre 2 y "N". El primer número de la lista (2) es primo. Tachamos todos los múltiplos de 2 (es decir, todos los pares). Volvemos al principio: el primer número sobrante (3) es primo. Tachamos todos los múltiplos de 3 (es decir, uno de cada 3 números). Ahora, al llegar al principio de la lista, 4 está ya tachado (es múltiplo de 2). El primer número sobrante que encontramos es el 5, pues también lo marcamos como primo y repetimos el proceso.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40			
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80			
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100																							

4	Múltiplos de 2	9	Múltiplos de 3 aún no tachados
65	Múltiplos de 5 aún no tachados	77	Múltiplos de 7 aún no tachados

APRENDIZAJES ESPERADOS



Comunicación matemática

- Identificar los divisores y múltiplos de un número
- Identificar los criterios de divisibilidad o multiplicidad
- Identificar los números primos, compuestos y simples
- Analizar los divisores por sus características

Razonamiento y demostración

- Usar las operaciones con múltiplos.
- Demostrar los criterios de divisibilidad
- Reconocer los números primos, compuestos y simples.

Resolución de problemas

- Determinar las cifras de un número usando los criterios de divisibilidad
- Determinar la cantidad de divisores de un número.
- Clasificar los divisores.

Divisibilidad y multiplicidad

En este capítulo aprenderemos:

- A identificar los divisores y múltiplos de un número.
- A usar las operaciones con múltiplos.
- A determinar las cifras usando divisibilidad y multiplicidad.

¿Enviando huevos?

Los estuches maples han sido diseñados para contener una amplia gama de tamaños de huevos, y minimizar problemas de roturas ya que cuentan con nervios centrales que le otorgan mayor rigidez. La calidad de la pasta de celulosa permite preservar la temperatura interior del huevo, y absorber el exceso de humedad. Esta es una java estándar para huevos, lista para su venta en un supermercado.



- ¿Cuántos huevos contiene esta java?
- ¿El número de huevos que contiene, tiene beneficios para su venta?
- Para la venta al por mayor, las jvas se llenan en cajas una sobre otra, formando una fila de 10 jvas, ¿cuántos huevos contendrá una caja?

Multiplicidad

$$A = B \times q$$

"A" es múltiplo de "B"
"B" es factor de "A"

→ Ejemplos:

- Como: $120 = 8 \times 15$ 120 es múltiplo de 8
8 es factor de 120
- Si $\overline{x139}$ es múltiplo de 43, hallar "x".

$$\begin{array}{r} 43 \times \\ \underline{129} \\ 301 \\ \hline x139 \end{array}$$

Entonces: $x = 3$

Así en la multiplicación:

$$N = 14 \cdot q$$

Los múltiplos de 14 serán: 14; 28; 42; 56; 70;...



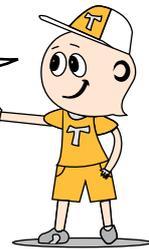
Notación

Siendo: "A" divisible entre "B" \Rightarrow "A" es múltiplo de "B"

$$A = \overset{\circ}{B}$$

Así: $45 = \overset{\circ}{9}$
 $120 = \overset{\circ}{8}$

Observa que:
"A" es divisible entre "B"
es equivalente a:
"A" es múltiplo de "B"



Cuando la división no es exacta

Por defecto

$$\begin{array}{r} A \mid d \\ R \mid q \end{array}$$

$$A = d \cdot q + R \Rightarrow A = \overset{\circ}{B} + R$$

Por exceso

$$\begin{array}{r} A \mid d \\ r \mid q + 1 \end{array}$$

$$A = d(q + 1) - r \Rightarrow A = \overset{\circ}{B} - r$$

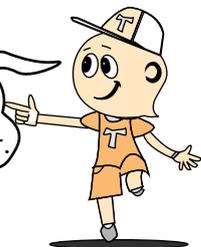
→ Ejemplo:

Como 47 no es divisible entre 7

$$47 = \overset{\circ}{7} + 5 \quad 47 = \overset{\circ}{7} - 2$$

$$\text{Porque: } 47 = 7(6) + 5 = 7(7) - 2$$

Recuerda que en la división inexacta la suma de los residuos es igual al divisor.



Observación

Para determinar la cantidad de múltiplos, tenemos:

Por agrupación

De los números: 1; 2; 3; ...; 12

- Los $\overset{\circ}{3}$ son:

$$\underbrace{1; 2; 3}_{\text{un } \overset{\circ}{3}} \quad \underbrace{4; 5; 6}_{\text{un } \overset{\circ}{3}} \quad \underbrace{7; 8; 9}_{\text{un } \overset{\circ}{3}} \quad \underbrace{10; 11; 12}_{\text{un } \overset{\circ}{3}}$$

La tercera parte son $\overset{\circ}{3}$, entonces: $\frac{12}{3} = 4$

- Los $\overset{\circ}{4}$ son:

$$\underbrace{1; 2; 3; 4}_{\text{un } \overset{\circ}{4}} \quad \underbrace{5; 6; 7; 8}_{\text{un } \overset{\circ}{4}} \quad \underbrace{9; 10; 11; 12}_{\text{un } \overset{\circ}{4}}$$

La cuarta parte son $\overset{\circ}{4}$, entonces: $\frac{12}{4} = 3$

Por desigualdad

De los números de tres cifras:

- Los $\overset{\circ}{7}$ son:

$$100 \leq 7k < 999$$

$$14,2 \leq k < 142,7$$

Los valores de "k" son: 15; 16; 17; ...; 142

Son en total: $\frac{142 - 15}{1} + 1 = 128$ números

También:

1. $\overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$

3. $\overset{\circ}{n} \cdot k = \overset{\circ}{n}$

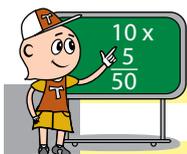
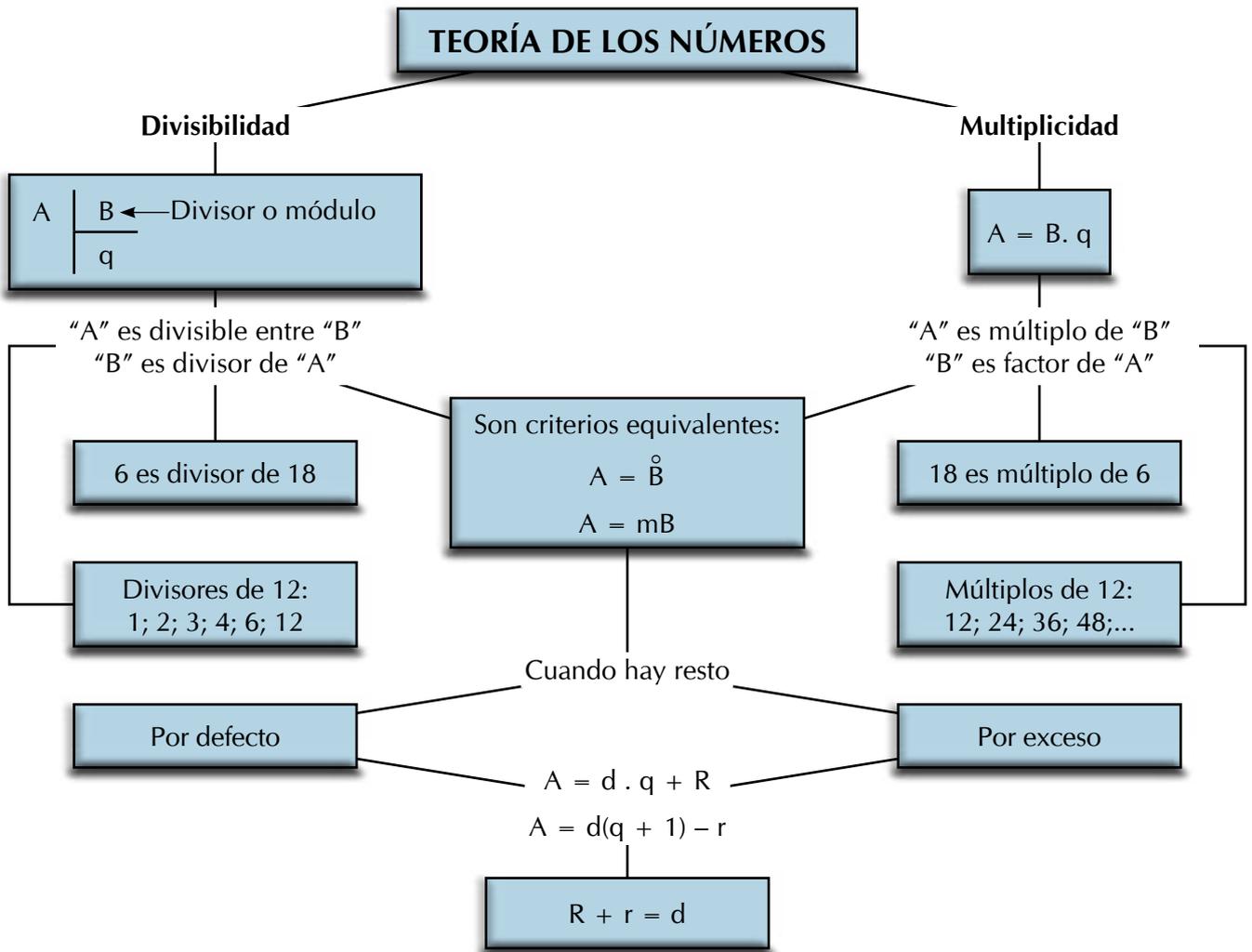
5. $(\overset{\circ}{n} + r)^k = \overset{\circ}{n} + r$

2. $\overset{\circ}{n} - \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$

4. $\overset{\circ}{n}^k = \overset{\circ}{n}$

6. $\left. \begin{matrix} A = \overset{\circ}{b} \\ A = \overset{\circ}{c} \\ A = \overset{\circ}{d} \end{matrix} \right\} A = \frac{\overset{\circ}{}}{\text{mcm}(b; c; d)}$

Síntesis teórica



Aplica lo comprendido

1. Escribe tres números de dos cifras que sean divisores de 60.
2. Escribe los tres primeros números de tres cifras que sean múltiplos de 45.
3. Si: $\overline{3a} = \overset{\circ}{7}$, entonces el valor de "a" es:
4. Si: $\overline{5a} = \overset{\circ}{9}$, entonces el valor de "a" es:
5. Los múltiplos de 6, menores que 50 son:



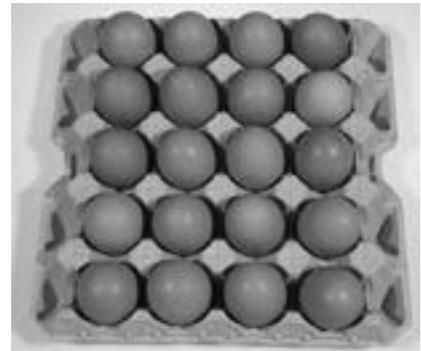
Aprende más

- Calcular "a", de modo que $\overline{271a}$ sea divisible entre 13.
- Hallar "x", para que el número $\overline{1854x}$ sea divisible entre 73.
- La diferencia entre un número de tres cifras y el que resulta de invertir el orden de sus cifras, siempre será divisible entre:
- Hallar "x", si el número $\overline{52x}$ es divisible entre 31.
- ¿Qué valor toma "x", si el número $\overline{7x}$ es: $\overset{\circ}{1}3 - 2$?
- ¿Cuántas cifras cuatro debe tener el número 444... para que sea divisible entre 13?
- Calcular "x", si el número $\overline{538x}$ es $\overset{\circ}{2}3 + 2$.
- ¿Cuántos múltiplos de 29 son de dos cifras?
- ¿Cuántos números de tres cifras terminan en 4 y son múltiplos de 8?
- ¿Cuántos números comprendidos entre 115 y 250, son múltiplos de 17?
- ¿Cuántos números de tres cifras son múltiplos de 6 o 4?
- ¿Cuántos números de dos cifras son múltiplos de 5 y 3?
- ¿Cuántos números de cuatro cifras son múltiplos de 25?
- ¿Cuántos números de cuatro cifras que terminan en 1, son divisibles entre 41?
- ¿Cuántos números de tres cifras son múltiplos de 5 pero no de 3?

Aplicación cotidiana

Embalaje de huevos

Para el reparto y la venta de huevos se utilizan diferentes envases, teniendo en cuenta el tamaño de cada huevo, la temperatura a la que debe mantenerlos, la humedad, etc. Todos son factores importantes, pero la facilidad para comercializarlos hace que los embalajes sean como el de la figura los más utilizados.



- Si compra varias jvas, ¿cómo expresarías la cantidad de huevos comprados?
- Para almacenar las jvas apiladas, está permitido a lo más 10 jvas una sobre otra. En tres filas de jvas, ¿cuántos huevos hay?



¡Tú puedes!

- Un número de la forma $\overline{(3a)(3b)ab}$ es siempre múltiplo de:

a) 41	b) 43	c) 11	d) 17	e) 9
-------	-------	-------	-------	------
- Un número de la forma $\overline{a0(2a)}$ es siempre divisible por:

a) 2; 3 y 4	b) 2; 17 y 5	c) 3; 5 y 17	d) 2; 6 y 17	e) 2; 3 y 11
-------------	--------------	--------------	--------------	--------------
- Hallar la suma de los 42 primeros números naturales múltiplos de 6:

a) 3 612	b) 5 418	c) 5 318	d) 3 712	e) 4 812
----------	----------	----------	----------	----------
- ¿Cuántos números impares de cuatro cifras son divisibles entre 17?

a) 475	b) 405	c) 279	d) 265	e) 138
--------	--------	--------	--------	--------

5. ¿Cuántos múltiplos de 30 hay en la siguiente serie: 24; 48; 72; 96; ...; 24 000?
 a) 100 b) 150 c) 170 d) 190 e) 200



Practica en casa

- La suma de los seis primeros números enteros positivos es divisible entre:
- Si: $145 = \overset{\circ}{17} + x$, hallar "x"
- ¿Cuántos números de tres cifras son múltiplos de 41?
- Si: $2\ 425 = \overset{\circ}{7} + x$, hallar "x".
- Hallar "n", si el número $\overline{13n7}$ es múltiplo de 73.
- ¿Para qué valor de "n", el número capicúa $\overline{3n3}$ al ser dividido entre 23 deja como resto 5?
- ¿Cuántos números de dos cifras existen, tal que al ser divididos entre 21 el resto que se obtiene es 3?
- ¿Cuántos números de dos cifras son múltiplos de 7?
- Hallar la suma de los múltiplos comunes de 2 y 3 menores que 28
- ¿Cuántos números de dos cifras son múltiplos de 6?
- Si $\overline{6n}$ es múltiplo de 6, hallar la suma de los valores de "n"
- ¿Cuántos múltiplos de 29 son de tres cifras y terminan en 3?
- Representar 836 en función del módulo 7
- ¿Cuántos números de tres cifras terminan en 2 y son múltiplos de 17?
- ¿Cuántos números de tres cifras terminan en 4 y son múltiplos de 8?

Operaciones y ecuaciones con múltiplos

En este capítulo aprenderemos:

- A efectuar operaciones con múltiplos

Los días de la semana

Domingo viene del latín dominus dies, que significa día del Señor; el lunes proviene de lunae dies, o día de la luna; el martes es el día consagrado a Marte, el dios de la guerra; miércoles fue consagrado al dios Mercurio; el jueves fue nombrado en honor al dios Júpiter, el viernes fue nombrado en honor a Venus, la diosa del amor; y el sábado fue nombrado así por el latín sabbatum, que significa descanso.

Enero							Febrero							Marzo							
L	M	M	J	V	S	D	L	M	M	J	V	S	D	L	M	M	J	V	S	D	
					1	2	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6			
3	4	5	6	7	8	9	7	8	9	10	11	12	13	7	8	9	10	11	12	13	
10	11	12	13	14	15	16	14	15	16	17	18	19	20	14	15	16	17	18	19	20	
17	18	19	20	21	22	23	21	22	23	24	25	26	27	21	22	23	24	25	26	27	
24	25	26	27	28	29	30	28	28	29	30	31										
Abril							Mayo							Junio							
L	M	M	J	V	S	D	L	M	M	J	V	S	D	L	M	M	J	V	S	D	
				1	2	3	30	31					1				1	2	3	4	5
4	5	6	7	8	9	10	2	3	4	5	6	7	8	6	7	8	9	10	11	12	
11	12	13	14	15	16	17	9	10	11	12	13	14	15	13	14	15	16	17	18	19	
18	19	20	21	22	23	24	16	17	18	19	20	21	22	20	21	22	23	24	25	26	
25	26	27	28	29	30	23	24	25	26	27	28	29	27	28	29	30					
Julio							Agosto							Septiembre							
L	M	M	J	V	S	D	L	M	M	J	V	S	D	L	M	M	J	V	S	D	
				1	2	3	1	2	3	4	5	6	7				1	2	3	4	
4	5	6	7	8	9	10	8	9	10	11	12	13	14	5	6	7	8	9	10	11	
11	12	13	14	15	16	17	15	16	17	18	19	20	21	12	13	14	15	16	17	18	
18	19	20	21	22	23	24	22	23	24	25	26	27	28	19	20	21	22	23	24	25	
25	26	27	28	29	30	31	29	30	31	26	27	28	29	30							
Octubre							Noviembre							Diciembre							
L	M	M	J	V	S	D	L	M	M	J	V	S	D	L	M	M	J	V	S	D	
31					1	2	1	2	3	4	5	6				1	2	3	4		
3	4	5	6	7	8	9	7	8	9	10	11	12	13	5	6	7	8	9	10	11	
10	11	12	13	14	15	16	14	15	16	17	18	19	20	12	13	14	15	16	17	18	
17	18	19	20	21	22	23	21	22	23	24	25	26	27	19	20	21	22	23	24	25	
24	25	26	27	28	29	30	28	29	30	26	27	28	29	30	31						

- Si hoy es martes 26 de julio, ¿qué día será dentro de 300 días?
- ¿Dentro de cuántos días, nuevamente será 26 y martes?

Saberes previos

Completa con números:

Múltiplo de 12			Múltiplo de 7			
Cuadrado de 13			Una gruesa			
			Divisor de 24		Divisor de 12	
			Múltiplo de 147		Divisor universal	
	Múltiplo de 11	Potencia de 2		Cuadrado perfecto		
	Máx. número en un dado	6 docenas		Múltiplo de 17		
				Múltiplo de 17		
				Cuadrado de 31		
Mayor # de cuatro cifras diferentes.			Múltiplo de 13			Número capicúa de cuatro cifras
Una docena			Divisor de 45			Una decena
	Es múltiplo de 9	Cuadrado de 6			Múltiplo de 27	
	Una mano	II			Menor cifra	
			Múltiplo de 335			
			C			

Conceptos básicos

Definiciones previas

Divisibilidad

En la siguiente división exacta:

A	B
	q

Divisor o módulo

"A" es divisible entre "B"
 "B" es divisor de "A"

Multiplicidad

En la siguiente multiplicación de números enteros

$$A = B \times q$$

"A" es múltiplo de "B"
 "B" es factor de "A"

Notación

Cuando la división no es exacta

Por defecto

A	d
R	q

$$A = d \cdot q + R$$

$$A = \overset{\circ}{d} + R$$

Por exceso

A	d
r	q + 1

$$A = d(q + 1) - r$$

$$A = \overset{\circ}{d} - r$$

Operaciones aritméticas

Adición y sustracción

Sean los números "A" y "B" que se expresan en función del divisor o módulo "n" como:

$$A = \overset{\circ}{n} + r_a \text{ y } B = \overset{\circ}{n} + r_b$$

Entonces:

$$A + B = \overset{\circ}{n} + (r_a + r_b)$$

$$A - B = \overset{\circ}{n} + (r_a - r_b)$$

→ Ejemplo:

- Sean los números:

$$A = \overset{\circ}{13} + 3 \quad B = \overset{\circ}{13} + 8 \quad C = \overset{\circ}{13} + 6$$

$$\text{Entonces: } A + B + C = \overset{\circ}{13} + (3 + 8 + 6) = \overset{\circ}{13} + 17$$

$$\text{Como: } 17 = 13 + 4 \Rightarrow A + B + C = \overset{\circ}{13} + 4$$

Recuerda que el residuo de una división debe ser menor que el divisor



Multiplicación

Sean los números "A" y "B" que se expresan en función del divisor o módulo "n" como:

$$A = \overset{\circ}{n} + r_a \text{ y } B = \overset{\circ}{n} + r_b$$

Entonces:

$$A \cdot B = \overset{\circ}{n} + (r_a \cdot r_b)$$

→ Ejemplo:

- Sean los números: $A = \overset{\circ}{11} + 3$; $B = \overset{\circ}{11} + 8$; $C = \overset{\circ}{11} + 6$

$$\text{Entonces: } A \cdot B \cdot C = \overset{\circ}{11} + (3 \times 8 \times 6) = \overset{\circ}{11} + 144$$

$$\text{Como: } 144 = 11(13) + 1 \rightarrow A \cdot B \cdot C = \overset{\circ}{11} + 1$$

División

Son diferentes los casos:

$$\text{Sea el número "A" tal que: } A = \overset{\circ}{14} + 6$$

$$\text{Entonces: } \frac{A}{2} = \overset{\circ}{7} + 3 \quad \frac{A}{3} = \overset{\circ}{14} + 2$$

$$\frac{A}{5} = \overset{\circ}{14} + 4, \text{ porque: } A = \overset{\circ}{14} + 6 = \overset{\circ}{14} + (14 + 6)$$

Para dividir o simplificar, el nuevo residuo debe ser entero



Potenciación

Sea el número "A" que se expresa en función del divisor o módulo "n" como:

$$A = \overset{\circ}{n} + r_a$$

Entonces:

$$A^k = \overset{\circ}{n} + (r_a)^k$$

→ Ejemplo:

- Sean los números: $A = \overset{\circ}{7} + 3$; $B = \overset{\circ}{7} + 2$

$$\text{Entonces: } A^2 + B^3 = \overset{\circ}{7} + (3^2 + 2^3) = \overset{\circ}{7} + 17$$

$$\text{Como: } 17 = 7(2) + 3 \Rightarrow A^2 + B^3 = \overset{\circ}{7} + 3$$

Ecuaciones

Como las soluciones que buscamos son valores enteros y de preferencia positiva, en algunos casos se pueden determinar por tanteo.

Con una variable

Si: $A = 11k + 6$, entonces:

$A = 11(k) + 6$ con valores de: $k = 0; 1; 2; 3; \dots$

$A = 6; 17; 28; 39; \dots$

Los valores de "A" forman una progresión aritmética de razón 11

Con dos variables

Si: $11A + 7B = 95 \dots (1)$

Con módulo 7:

$(7 + 4)A + 7(B) = 7(13) + 4 \Rightarrow 7 + 4A + 7 = 7 + 4 \Rightarrow 4A = 7 + 4 \Rightarrow A = 7 + 1$

$A = 1; 8; 15; 22; 29; \dots$

Los valores de "A" forman una progresión aritmética de razón 7.

Reemplazando en la ecuación (1):

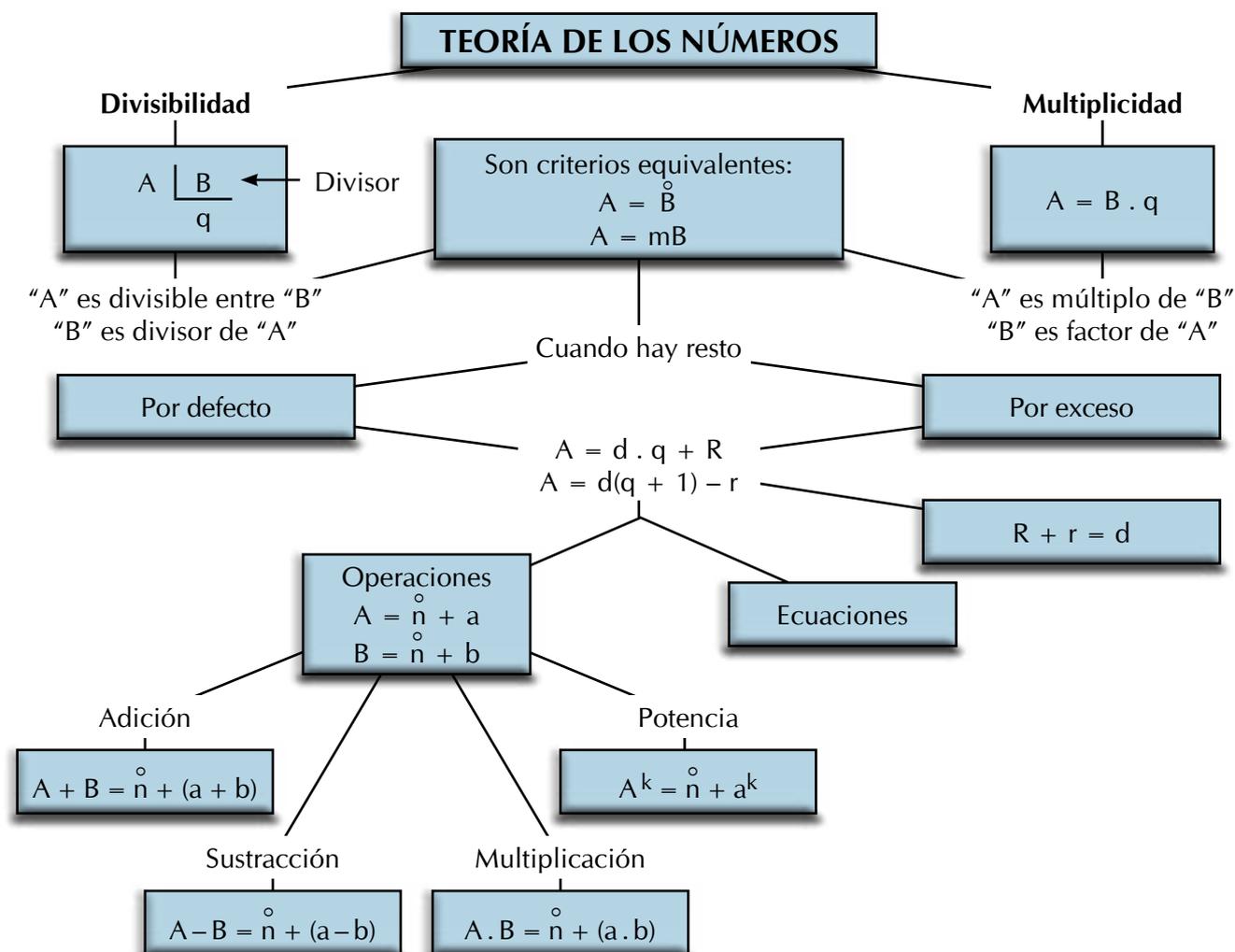
$B = 12; 1; -10, \dots$

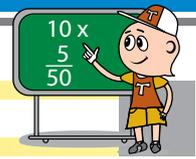
Los valores de "B" forman una progresión aritmética de razón 11.

A estas ecuaciones se les llama ecuaciones Diofánticas y existen diferentes métodos de solución.



Síntesis teórica





Aplica lo comprendido

- Completa:
 - $38 = \overset{\circ}{7} + \dots\dots$
 - $48 = \overset{\circ}{9} + \dots\dots$
 - $51 = \overset{\circ}{6} + \dots\dots$
- Completa:
 - $48 = \overset{\circ}{9} - \dots\dots$
 - $68 = \overset{\circ}{11} - \dots\dots$
 - $59 = \overset{\circ}{7} - \dots\dots$
- Completa:
 - $\overset{\circ}{9} + 5 = \overset{\circ}{9} - \dots\dots\dots$
 - $\overset{\circ}{15} + 7 = \overset{\circ}{15} - \dots\dots\dots$
 - $\overset{\circ}{13} + 5 = \overset{\circ}{13} - \dots\dots\dots$
- Sean los números: $A = \overset{\circ}{7} + 3$; $B = \overset{\circ}{7} + 4$ y $C = \overset{\circ}{7} + 6$. Hallar el residuo de dividir "A + B + C" entre 7.
- Sean los números: $A = \overset{\circ}{13} + 5$ y $B = \overset{\circ}{13} + 4$. Hallar el residuo de dividir "A . B" entre 13.



Aprende más

- Si 234×453 se divide entre 11, ¿qué residuo se obtiene?
- Calcular el residuo al dividir: $\overline{a4b} - \overline{b2a}$ entre 11.
- Calcular el residuo al dividir: $\overline{a4(2a)}$ entre 17.
- Si 678^4 se divide entre 13, ¿qué residuo se obtiene?
- Si 735^5 se divide entre 11, ¿qué residuo se obtiene?
- Si el número $\overline{3xx2}$ se divide entre 11, ¿cuál es el residuo?
- Si: $A = \overset{\circ}{13} + 5$ y $B = \overset{\circ}{13} - 2$, el residuo de dividir "A² + B⁶" entre 13 es:
- Si: $M = \overset{\circ}{17} + 15$ y $N = \overset{\circ}{17} + 14$, hallar el resto de dividir "M⁵ + N³" entre 17.
- Si: $A = \overset{\circ}{11} + 4$ y $B = \overset{\circ}{11} + 2$, el residuo de dividir "A⁴ + B⁴" entre 11 es:
- Si: $\overline{ab} = \overset{\circ}{7}$, calcular el resto de dividir: $\overline{1ab} + \overline{ab1}$ entre 7.
- Calcula el resto de dividir: $123^3 + 231^2 \times 321 + 132^4$ entre 6
- Hallar el resto de dividir 5^{2007} entre 9
- Hallar el resto de dividir 7^{421} entre 9
- Si el número $\overline{1x16}$ es divisible entre 19, calcular "x".
- Calcular "x", si el número $\overline{xx73}$ es divisible entre 17.

Aplicación cotidiana

Sistema duodecimal

Como sabemos en este sistema de numeración se tiene unidades, docenas, gruesas, masas, ... La tabla de multiplicar en este sistema se muestra en la tabla:

- En todo número que es múltiplo de 6, la cifra de unidades es:
- La suma de cifras de todo número múltiplo de 11 es:

	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	10
2	4	6	8	A	10	12	14	16	18	1A	20
3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29	30
4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38	40
5	A	13	18	21	26	2B	34	39	42	47	50
6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56	60
7	12	19	24	2B	36	41	48	53	5A	65	70
8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74	80
9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83	90
A	18	26	34	42	50	5A	68	76	84	92	A0
B	1A	29	38	47	56	65	74	83	92	A1	B0
10	20	30	40	50	60	70	80	90	A0	B0	100



¡Tú puedes!



- ¿Cuántos números de la forma $\overline{ab0ab}$ son múltiplos de 17?
 - 3
 - 4
 - 5
 - 12
 - Más de 12
- Por 500 soles se compraron 100 frutas entre sandías, manzanas y ciruelas. Si los precios unitarios de cada uno son 50; 10 y 1 soles respectivamente, ¿cuántas frutas entre sandías y manzanas hay?
 - 39
 - 40
 - 41
 - 42
 - 43
- Se dispone de 100 soles para comprar sellos de correos de 1; 4 y 12 soles. ¿Cuántos sellos de cada uno de estos precios se podrán comprar?
 - 23; 11 y 6
 - 21; 10 y 9
 - 28; 9 y 3
 - 25; 6 y 9
 - 29; 9 y 2
- ¿Cuántos cuadrados perfectos de tres cifras son $\overset{\circ}{7} + 2$?
 - 7
 - 8
 - 9
 - 10
 - 6
- ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, sabiendo que "n" es $\overset{\circ}{14}$?
 - $n(n + 3) = \overset{\circ}{14}$
 - $(n - 2)(n - 21) = \overset{\circ}{14}$
 - $2(n + 7) + 3n = \overset{\circ}{14}$
 - $(n + 1)(n + 2)(n - 3) - 8 = \overset{\circ}{14}$
 - I y II
 - II y III
 - I; II y III
 - I y III
 - Todas



Practica en casa



- Si $34 \times 45 \times 34$ se divide entre 9, ¿qué residuo se obtiene?
- Reducir: $(\overset{\circ}{7} + 5)^2 + (\overset{\circ}{7} + 2)(\overset{\circ}{7} + 4)$.
- Expresar 6! en función del módulo 11.
- Reducir: $(\overset{\circ}{9} + 4)^2 + (\overset{\circ}{9} + 3)^2(\overset{\circ}{9} + 2)$.
- Si 81^5 se divide entre 5, ¿cuál es el residuo de la división?
- Reducir: $(\overset{\circ}{13} + 5)^2 + (\overset{\circ}{13} + 2)^2(\overset{\circ}{13} + 4)$
- Calcular el residuo al dividir: $\overline{a4b} - \overline{b2a}$ entre 9.
- Si: $A = \overset{\circ}{11} + 5$ y $B = \overset{\circ}{11} + 6$, ¿cuál es el residuo al dividir "A . B + A + B" entre 11?
- Calcular el residuo al dividir $\overline{a4b} - \overline{b2a}$ entre 99.
- Si el número $\overline{(2x)32x}$ se divide entre 23, ¿cuál es el residuo?
- Si: $A = \overset{\circ}{9} + 5$ y $B = \overset{\circ}{9} + 6$, ¿cuál es el residuo al dividir "A . B" entre 9?
- A una fiesta asistieron 50 personas. La quinta parte de los varones y la séptima parte de las damas son casadas. ¿Qué diferencia hay entre damas y varones?
- Calcular "x", si el número $\overline{xxx8}$ es divisible entre 43.
- Calcular "x", si el número $\overline{xx05}$ es divisible entre 23.
- Calcular "x", si el número $\overline{2xx5}$ es divisible entre 41

Criterios de divisibilidad

En este capítulo aprenderemos:

- A identificar los criterios de divisibilidad y aplicarlos.
- A demostrar los criterios de divisibilidad

Los años bisiestos

La regla para los años bisiestos según el calendario gregoriano es:

Un año es bisiesto si es divisible por 4, excepto el último de cada siglo (aquel divisible por 100), salvo que este último sea divisible por 400.

Febrero 2008						
L	M	M	J	V	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29		



Conocimientos astronómicos precolombinos

La cultura Tiahuanaco se extendió sobre una enorme región del sur peruano y gran parte de lo que hoy es Bolivia. Al igual que muchas culturas precolombinas, entre otros, alcanzaron un alto conocimiento de las matemáticas y de la geografía, particularmente de la astronomía, lamentablemente con la llegada de los españoles muchos de sus descubrimientos fueron simplemente destruidos, sin embargo vivimos en estos últimos años un redescubrir de saberes que se creían perdidos y revalorar aquellos a los que no se les daba la debida importancia.

Así en la Portada del Sol (Bolivia), la iconografía tallada en su parte superior, corresponde a un calendario basado en el ciclo solar. En él, el año se divide en 12 meses de 30 días, más 5 días y fracción, que ponen en evidencia que conocían perfectamente la duración del año solar y de la existencia y necesidad de los años bisiestos.

- Hoy es martes 27 de julio de 2010, ¿qué día será dentro de 10 años?
 - ¿El 28 de julio de qué año será domingo?

Saberes previos

Completa con números:

Cuadrado de 11			Múltiplo de 11		Suma de cifras es 18	
51 es múltiplo de 13 más...			Mayor número múltiplo de 13		90 es múltiplo de 7 más...	
					52 es múltiplo de 6 más...	
					49 es múltiplo de 5 más...	
Capicúa de cuatro cifras		Menor # de cuatro cifras diferentes				
Múltiplo de 7		Potencia de 2				
	66 es múltiplo de 9 más...		Cubo de 7			
	Residuo mínimo		Múltiplo de 8			
	$4^2 - 2^4$			Suma de cifras 13		72 es múltiplo de 7 más...
	Dos docenas			Múltiplo de 11		Tres docenas
Cifras iguales					Número capicúa de tres cifras	
Residuo mínimo					41 es múltiplo de 19 más...	
			Cuadrado de 21			
			Cubo de 6			

Conceptos básicos

Criterios de divisibilidad

Son reglas prácticas que permiten reconocer si un número es divisible entre cierto módulo.

Criterio por 2^n

Criterio por 2

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{2} + d$$

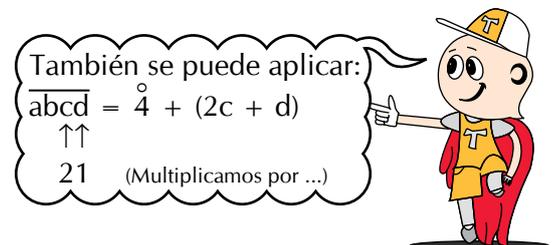
Para que \overline{abcd} sea divisible entre 2, la cifra "d" es: 0; 2; 4; 6; 8



Criterio por 4

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{4} + \overline{cd}$$

Para que \overline{abcd} sea divisible entre 4, el número "cd" es: 00; 04; 08; 12; ...



Criterio por 8

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{8} + \overline{bcd}$$

Para que \overline{abcd} sea divisible entre 8, el número " \overline{bcd} " debe ser múltiplo de 8.

También se puede aplicar:
 $\overline{abcd} = \overset{\circ}{8} + (4b + 2c + d)$
 ↑↑↑
 421 (Multiplicamos por ...)



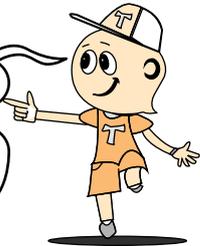
Criterio por 5ⁿ

Criterio por 5

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{5}; d = \overset{\circ}{5} \text{ ó } 0$$

Para que \overline{abcd} sea divisible entre 5, la cifra "d" es: 0 o 5

Si un número es divisible entre 5, la cifra de las unidades debe ser cinco o cero.



Criterio por 25

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{25}; \overline{cd} = \overset{\circ}{25} \text{ ó } 00$$

Para que \overline{abcd} sea divisible entre 25, el número " \overline{cd} " es: 00; 25; 50 o 75

Criterio por 125

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{125}; \overline{bcd} = \overset{\circ}{125} \text{ ó } 000$$

Para que \overline{abcd} sea divisible entre 125, el número " \overline{bcd} " debe ser múltiplo de 125

Criterio por 3 y 9

Criterio por 3

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{3} + (a + b + c + d)$$

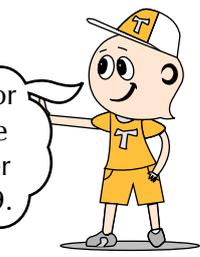
Para que \overline{abcd} sea divisible entre 3, la suma de sus cifras debe ser múltiplo de 3.

Criterio por 9

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{9} + (a + b + c + d)$$

Para que \overline{abcd} sea divisible entre 9, la suma de sus cifras debe ser múltiplo de 9.

Para el criterio por 3 y 9, la suma de las cifras debe ser múltiplo de 3 o 9.



Criterio por 7

$$\overline{abcdef} = \overset{\circ}{7} + a(-2) + b(-3) + c(-1) + d(2) + e(3) + f(1)$$

$$\underbrace{231231}_{- \quad +} = \overset{\circ}{7} + (f + 3e + 2d) - (c + 3b + 2a)$$

Para que \overline{abcd} sea divisible entre 7, la expresión " $d + 3c + 2b - a$ " debe ser múltiplo de 7.

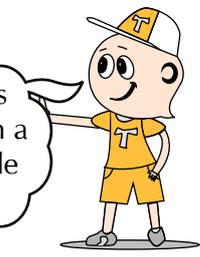
Criterio por 11

$$\overline{abcdef} = \overset{\circ}{11} + (f + d + b) - (e + c + a)$$

$$- + - + - +$$

Para que \overline{abcd} sea divisible entre 11, la expresión " $d - c + b - a$ " debe ser múltiplo de 11.

Estos dos últimos criterios se aplican a partir de la cifra de unidades.



Criterio por 99 o 33

$$\overline{abcdef} = 99 \overset{\circ}{\circ} \text{ o } 33 \overset{\circ}{\circ}$$

$$\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = 99 \overset{\circ}{\circ} \text{ o } 33 \overset{\circ}{\circ}$$

Criterio por 13

$$\overline{abcdefg} = 13 \overset{\circ}{\circ} + a + 4b + 3c - d - 4e - 3f + g$$

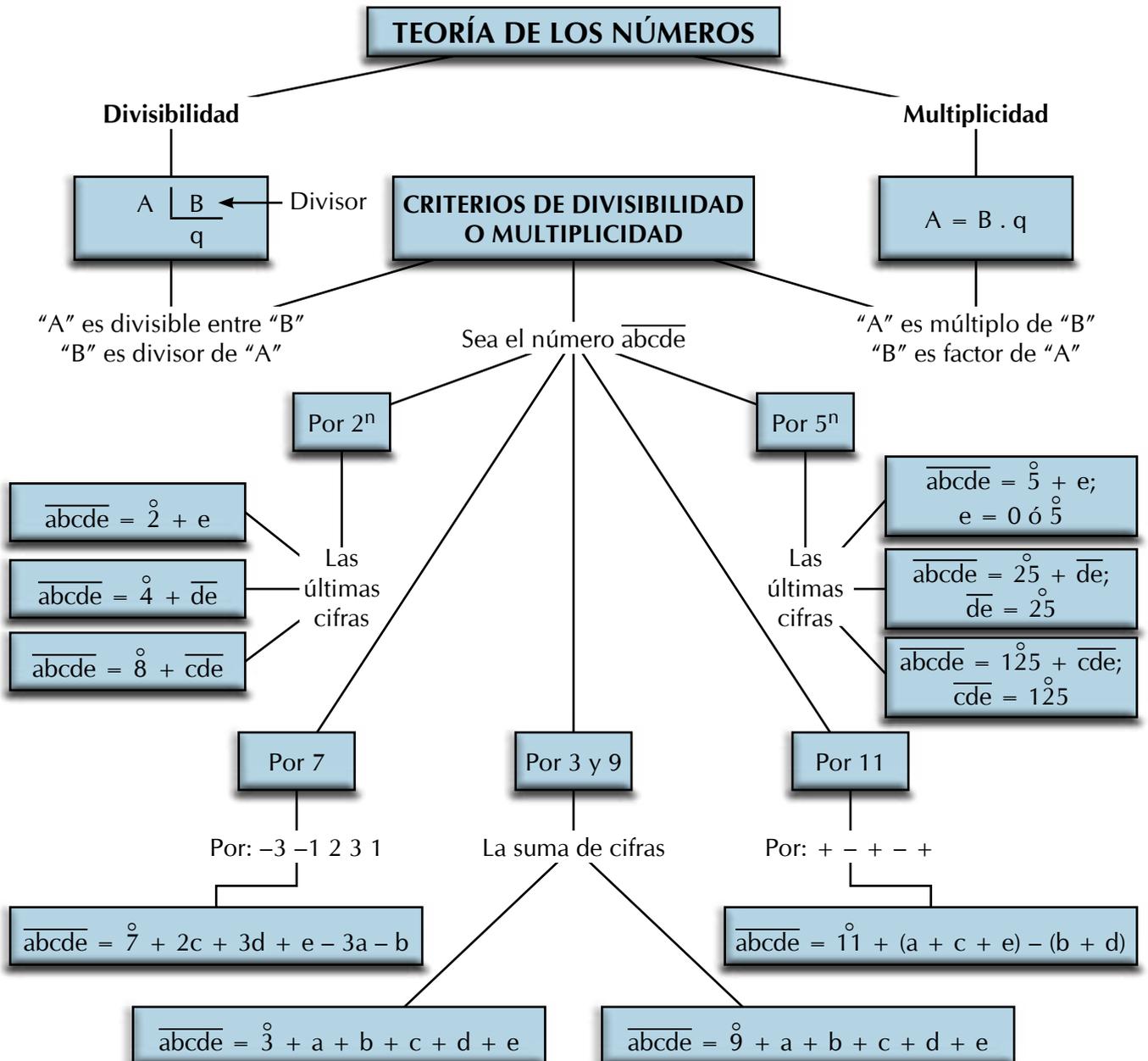
$$1431431$$

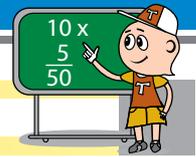
$$+++----+$$

Observaciones

- Si el número termina en un cero, el número es $2 \overset{\circ}{\circ}$; $5 \overset{\circ}{\circ}$ ó $10 \overset{\circ}{\circ}$
- Si el número termina en dos ceros, el número es $4 \overset{\circ}{\circ}$; $25 \overset{\circ}{\circ}$ ó $100 \overset{\circ}{\circ}$
- Si el número termina en tres ceros, el número es $8 \overset{\circ}{\circ}$; $125 \overset{\circ}{\circ}$ ó $1000 \overset{\circ}{\circ}$

Síntesis teórica





Aplica lo comprendido

1. ¿Cuáles de los siguientes números son divisibles entre 2?

- 12 345 (No) 2 348 ()
 29 982 () 2 340 ()
 1 001 () 43 211 ()

2. ¿Cuáles de los siguientes números son divisibles entre 4?

- 1 242 (No) 3 576 ()
 30 457 () 876 ()
 1 986 () 64 348 ()

3. ¿Qué números son divisibles entre 3?

- 1 245 (Sí) 2 348 ()
 19 980 () 2 340 ()
 1 001 () 43 212 ()

4. ¿Cuántos números son divisibles entre 5?

- 2 346 (No) 4 346 ()
 20 007 () 1 890 ()
 1 000 () 84 115 ()

5. Determina "a" en cada caso:

$$\overline{a22a} = \overset{\circ}{5} \Rightarrow a = \dots$$

$$\overline{2aa5} = \overset{\circ}{25} \Rightarrow a = \dots \text{ y } a = \dots$$

Aprende más



1. ¿Cuál es la suma de los valores de "x", si el número $\overline{x245x}$ es divisible entre 4?

2. Calcular "x", si: $\overline{4251x} = \overset{\circ}{8}$

3. ¿Cuál es la suma de los valores de "m", si el número $\overline{5mm5}$ es divisible entre 25?

4. Calcular "x", si: $\overline{83x51} = \overset{\circ}{9}$

5. Calcular "x", si: $\overline{43x214} = \overset{\circ}{7}$.

6. Calcular "x", si: $\overline{x245x} = \overset{\circ}{11}$.

7. Hallar el valor de "a", si: $\overline{73a35} = \overset{\circ}{7}$.

8. Hallar "n", si el número $\overline{n(n+3)(2n)(n+1)}$ es múltiplo de 4.

9. Calcular "x", si: $\overline{xx27xx} = \overset{\circ}{8}$.

10. Determinar el valor de "a", en: $\overline{a55(a-4)} = \overset{\circ}{7}$.

11. Calcular "a + b", si: $\overline{a8ab} = \overset{\circ}{125}$.

12. Determinar el valor de "a . b", en: $\overline{ba34b} = \overset{\circ}{45}$

13. Determinar el valor de "a . b", en: $\overline{a34b} = \overset{\circ}{72}$

14. Determinar el valor de "a . b", en: $\overline{3a71b} = \overset{\circ}{56}$

15. Determinar el valor de "a . b", en: $\overline{1a45b} = \overset{\circ}{72}$

Aplicación cotidiana

Los años bisiestos

El calendario juliano consideraba bisiesto los años divisibles entre cuatro. Así el año juliano dura $365 \text{ días} + 1/4 = 365,25 \text{ días}$.

La regla para los años bisiestos según el calendario gregoriano es: Un año es bisiesto si es divisible por 4, excepto el último de cada siglo (aquel divisible por 100), salvo que este último sea divisible por 400.

16. ¿Cuáles son los próximos 5 años bisiestos?

17. Los años en que se realizan los mundiales de fútbol, ¿son bisiestos?





¡Tú puedes!

- Si $\overline{a2abb}$ es divisible por 77, entonces "a + b" vale:
a) 12 b) 10 c) 7 d) 5 e) 4
- Hallar el mayor valor de "a . b", si $\overline{23ba5}$ es múltiplo de 125.
a) 12 b) 56 c) 62 d) 65 e) 87
- Determinar el valor de "x + y", si: $\overline{xxx37y} = \overset{\circ}{88}$
a) 10 b) 6 c) 8 d) 9 e) 11
- Determinar el valor de "a + b", sabiendo que el número $\overline{aab8b}$ es múltiplo de 5; 8 y 9
a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 13
- ¿Cuántos números de la forma: $N = \overline{89a46b}$ son múltiplos de 56?
a) Ninguno b) 1 c) 2 d) 3 e) Más de 3



Practica en casa

- Determinar el valor de "x" en $\overline{3444x}$, si es divisible entre 11.
- Determinar el valor de "x", si: $\overline{y23x} = \overset{\circ}{8}$
- Determinar el valor de "x", si: $\overline{61x9x} = \overset{\circ}{8}$
- Calcular el valor de "a", para que el numeral $\overline{7439a}$ sea divisible por 7.
- Calcular "a", si: $\overline{3a6a123} = \overset{\circ}{9}$
- Calcular "a² - b²", si: $\overline{a892} = \overset{\circ}{9}$ y $\overline{4b97} = \overset{\circ}{11}$.
- Calcular "b - a", si $\overline{a2ba}$ es múltiplo de 5 y 9.
- Hallar el residuo al dividir $\overline{b32b}$ entre 7.
- Determinar el valor de "b", si: $\overline{7b4b3} = \overset{\circ}{7}$
- Calcular el valor de "n", si: $\overline{2n45n} = \overset{\circ}{9}$.
- Hallar "x + y", para que $\overline{3x523y}$ sea divisible entre 72.
- Hallar "a . b", si: $\overline{a713b} = \overset{\circ}{88}$
- Si el número: $\overline{xy57x} = \overset{\circ}{56}$, hallar el valor de "y".
- Dar el valor de "a", en: $\overline{a577n} = \overset{\circ}{72}$
- Hallar un número mayor que 200 y menor que 300 tal que al dividirlo entre 9; 5 y 2, deja residuo 1.

Complemento



Aprende más

- Si: $A = \overset{\circ}{17} + 5$ y $B = \overset{\circ}{17} + 2$, el residuo que se obtiene al dividir " $A^2 + B^6$ " entre 17 es:
- Calcular "a", de modo que $\overline{205a}$ sea divisible entre 17.
- ¿Cuántos múltiplos de 19 son de tres cifras y terminan en 3?
- Hallar el valor de "n", si el número $\frac{n(n+3)(2n)(n-1)}{n(n+3)(2n)(n-1)}$ es múltiplo de 4.
- Calcular "x", si: $\overline{6253x} = \overset{\circ}{8}$
- Calcula el resto al dividir: $23^3 + 31^2 \times 32 + 32^4$ entre 7.
- ¿Cuántos valores puede tomar "x", para que el número $\overline{6253x2}$ sea múltiplo de 8?
- Hallar "n", si el número $\overline{3n42}$ es múltiplo de 73.
- ¿Cuántos números de tres cifras terminan en 3 y son múltiplos de 17?
- ¿Cuántos números de tres cifras terminan en 6 y son múltiplos de 8?
- Hallar el resto al dividir 5^{2012} entre 7.
- Hallar el resto al dividir 17^{42} entre 11
- Determinar el valor de "x . y", si: $\overline{x2y3x} = \overset{\circ}{45}$
- Determinar el valor de "x . y", si: $\overline{xy53x} = \overset{\circ}{72}$
- Determinar el valor de "x . y", si: $\overline{y4x3x} = \overset{\circ}{56}$

Practica en casa



- Determina la suma de todos los números de dos cifras que son múltiplos de 30.
- Determina la suma de divisores del número 30 que sean de dos cifras.
- ¿Cuántos números de tres cifras son múltiplos de 5 y 3?
- ¿Cuántos números de tres cifras son múltiplos de 17?
- ¿Para qué valor de "a", el número $\overline{(a-1)5(a+1)}$ es múltiplo de 4?
- Halle la suma de valores de "x", si el número $\frac{(x+1)x(x+1)}{(x+1)x(x+1)}$ es $\overset{\circ}{5} + 3$.
- Determinar el valor de "x", si: $\overline{5xx3x} = \overset{\circ}{8}$.
- Si: $A = \overset{\circ}{13} + 4$ y $B = \overset{\circ}{13} + 2$, el residuo que se obtiene al dividir " $A^4 + B^4$ " entre 13 es:
- Hallar "a", si el número $\overline{62a53}$ es múltiplo de 9.
- Calcular "x", si: $\overline{43x14} = \overset{\circ}{7}$.
- Calcular "x", si: $\overline{x21xx5x} = \overset{\circ}{11}$.
- Determinar el valor de "x", si: $\overline{23x2(x+1)} = \overset{\circ}{11}$.
- Determinar la suma de los valores de "x", si: $\overline{25x3} = \overset{\circ}{7}$.
- Determinar el valor de "x + y", si: $\overline{62y53xx} = \overset{\circ}{77}$.
- Hallar el mayor valor de "x . y", en: $\overline{6y43x} = \overset{\circ}{56}$.

Números primos

En este capítulo aprenderemos:

- A identificar los números primos, compuestos y simples.
- A reconocer los números primos, compuestos y simples.
- A determinar la cantidad de divisores de un número.

El número primo más grande

Un sistema de computadoras en red de la Universidad de California, ha encontrado el número primo más grande hasta el momento. El inmenso número está hecho de casi 13 millones de dígitos (12,978,189 para ser más exactos).

El número es: $2^{43112609} - 1$.

3 1 6 4 7 0 2 6 9 3 3 0 2 5 5 9 2 3 1 4 3 4 5 3 7 2 3 9 4 9 3 3 7 5 1 6 0 5 4 1 0 6 1 8 8 4 7 5 2 6 4 6
 4 4 1 4 0 3 0 4 1 7 6 7 3 2 8 1 1 2 4 7 4 9 3 0 6 9 3 6 8 6 9 2 0 4 3 1 8 5 1 2 1 6 1 1 8 3 7 8 5 6 7 2
 6 8 1 6 5 3 9 9 8 5 4 6 5 0 9 7 3 5 6 1 2 3 4 3 2 6 4 5 1 7 9 6 7 3 8 5 3 5 9 0 5 7 7 2 3 8 1 7 9 3 5 7
 9 0 0 8 7 6 4 2 6 1 0 3 9 4 3 7 8 2 3 7 6 4 9 4 5 9 1 7 4 2 9 3 4 5 8 8 4 9 7 1 1 7 5 8 7 1 4 6 9 1 6 9
 7 2 9 8 4 7 6 1 1 5 9 0 6 0 8 7 3 2 5 0 9 3 9 4 6 2 0 8 5 5 7 5 7 4 0 7 5 4 5 7 7 0 9 8 6 2 0 5 5 8 0 1
 1 7 7 9 5 2 9 8 8 4 0 4 2 1 9 8 2 8 7 6 4 3 3 1 9 3 3 0 4 6 5 0 6 4 4 5 5 2 3 4 9 8 8 1 4 2 1 3 9 5 6 5
 7 8 5 4 4 7 4 7 4 0 2 3 5 4 6 3 5 3 7 5 8 5 3 7 3 2 4 8 0 1 8 3 8 1 2 0 3 8 7 6 0 0 8 6 8 4 1 6 5 2 5 4
 0 0 7 9 0 3 8 1 2 8 5 8 8 8 2 5 6 6 8 7 0 8 5 8 5 5 4 5 6 2 3 1 5 7 7 5 2 7 9 3 9 3 0 5 9 2 0 8 1 1 7 6
 6 5 8 5 3 0 8 6 7 0 1 3 2 1 2 9 1 5 5 2 2 1 8 0 4 3 8 1 5 4 8 6 2 5 7 8 7 9 4 3 0 2 0 6 9 4 5 2 8 0 1 5
 9 9 9 2 2 1 7 1 8 1 9 1 5 5 7 7 6 1 ... (millones de números omitidos)... 0 6 9 9 3 4 1 5 9 7 0 9 8 0
 3 6 8 8 3 0 8 9 9 8 3 7 2 0 5 1 4 6 3 4 4 1 1 1 5 9 7 6 0 2 8 2 2 6 9 0 9 1 5 6 6 8 2 1 9 2 0 1 3 9 8 1
 8 3 0 8 2 2 0 1 4 0 4 6 1 0 6 6 0 9 1 1 2 9 0 3 4 2 0 3 6 5 8 6 0 8 1 2 5 3 3 5 5 0 7 9 2 4 0 7 4 4 2 6
 1 8 1 4 8 7 0 9 1 8 0 5 5 9 2 0 4 3 2 3 7 2 3 0 1 9 6 2 0 1 6 8 3 5 3 5 9 4 6 2 3 1 0 9 8 0 0 6 7 4 3 4
 9 8 4 6 2 5 3 8 0 7 8 7 2 4 7 8 0 2 5 3 2 7 5 8 5 1 1 3 3 3 5 0 2 4 6 0 7 7 8 8 8 4 3 3 9 0 3 4 0 1 9 7
 0 0 9 2 7 6 6 3 9 5 8 1 6 7 6 9 8 9 0 8 0 1 0 7 3 6 1 0 1 4 1 0 1 3 6 9 9 6 8 5 2 9 2 5 7 0 3 2 7 2 5 5
 3 5 4 4 6 2 2 4 6 4 6 8 5 9 2 8 7 0 7 5 2 6 5 6 8 1 0 5 9 9 3 6 8 9 9 1 5 2 1 8 0 7 3 8 0 1 4 4 3 4 0 4
 9 4 5 0 0 8 2 6 6 4 2 5 9 3 2 4 1 3 1 3 9 8 2 6 9 1 5 0 8 4 0 6 9 9 9 1 1 5 9 2 7 9 7 9 1 9 0 8 3 9 8 1
 3 0 2 2 3 3 0 4 8 2 4 0 8 3 1 1 9 0 9 3 1 9 5 9 9 8 0 1 4 5 6 2 4 5 6 3 4 7 9 4 1 2 0 2 1 9 5 9 0 0 9 2
 8 0 7 9 6 7 0 7 2 9 4 4 7 9 2 1 6 1 6 4 9 1 8 8 7 4 7 8 2 6 5 7 8 0 0 2 2 1 8 ...

- ¿Los números de la forma " $2^n - 1$ " son primos?



Saberes previos

Completa con números:

Menor # de 4 cifras distintas			Múltiplo de 7 y capicúa	2 decenas		
$1 + 4 \times 4$			Una gruesa	2 docenas		
				Máximo puntaje en un dado		
Cubo de 20, más 1					Ocho al cuadrado	Múltiplo de 7 menor que 20
Cubo perfecto					Múltiplo de 16	Múltiplo de 9
		Divisor de 105		Múltiplo de 11		
		$53 \times 7 \times 2$		Capicúa múltiplo de 5 y 9		
	Mayor cifra par		Capicúa múltiplo de 5 y 9			
	Capicúa de dos cifras		$3 + 2 \times 2$			
Múltiplo de 17			Múltiplo de 7			Docena y media
Una mano			Cuadrado de 85			Cuadrado de 25



Conceptos básicos

Número primo

También se le conoce como primo absoluto. Es aquel número que acepta solo dos divisores, la unidad y el mismo número.

➔ **Ejemplo:**

Así el número 59 es primo, porque sus únicos divisores son el 1 y el 59.

Observación:

- Sucesión de números primos: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; ...



Número compuesto

Es aquel número que acepta más de dos divisores.

➔ **Ejemplo:**

Así el número 12 es compuesto porque tiene como divisores a 1; 2; 3; 4; 6 y 12 (más de dos)

Observación:

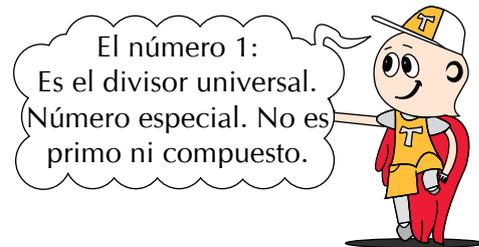
- La sucesión de números compuestos es: 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; ...

Número simple

Es aquel número que no es compuesto, ni primo

Observación:

- El 1 no es primo, ni compuesto.
- La sucesión de números simples es: 1; 2; 3; 5; 7; 11; ...



Números primos entre sí

Dos o más números son P.E.Si, cuando el único divisor común de dichos números es la unidad.

➔ **Ejemplo:**

12 y 25 son P.E.Si, porque el único divisor común es el 1.

Observación:

- Dos números consecutivos son P.E.Si
- La unidad es P.E.Si con todo número

Teorema fundamental de la Aritmética

También se llama descomposición canónica de un número y consiste en expresar el número como el producto de sus factores primos.

La descomposición canónica de 120 es:

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Luego: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Análisis de divisores

Tabla de divisores de un número

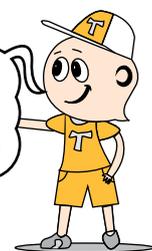
Sirve para determinar los divisores de un número de forma ordenada.

Así por ejemplo: $72 = 2^3 \times 3^2$.

Potencias	1	2^1	2^2	2^3
1	1	2	4	8
3	3	6	12	24
3^2	9	18	36	72

De los divisores de un número:

- El menor es la unidad
- El mayor es el mismo número



Cantidad de divisores

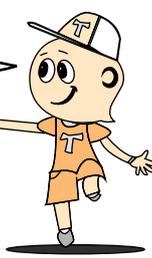
Sea: $N = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma$

Número de divisores = $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$

➔ **Ejemplo:**

- Del número 72:
Descomposición canónica: $72 = 2^3 \times 3^2$.
Número de divisores = $(3 + 1)(2 + 1) = 12$

Para aplicar esta fórmula es necesario descomponer canónicamente el número



Clasificación de divisores

$$\text{Total de divisores} = \begin{cases} \text{Simples} & \left\{ \begin{array}{l} \text{La unidad} \\ \text{Los primos} \end{array} \right. \\ \text{Compuestos} & \end{cases}$$

➔ Ejemplo:

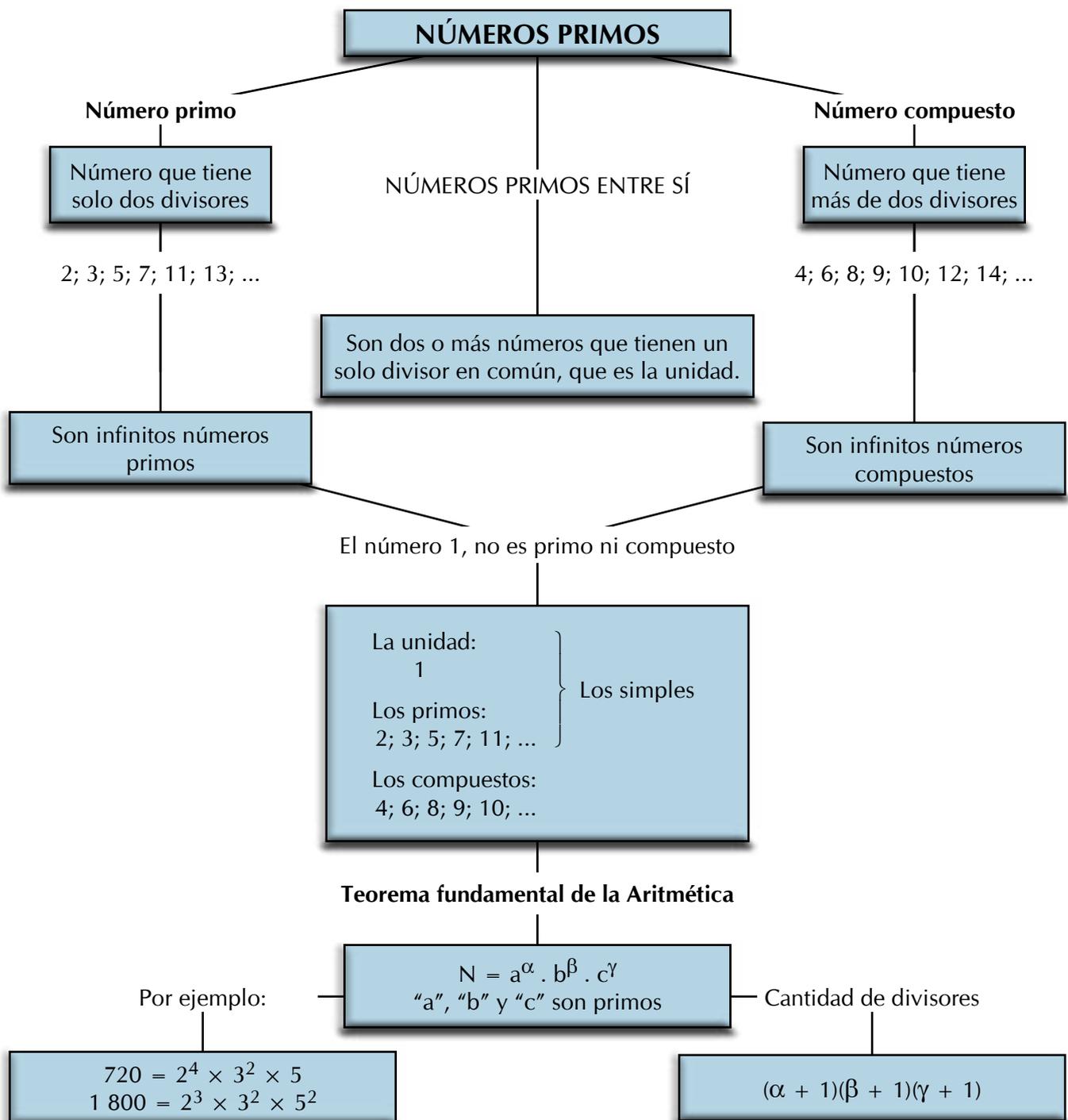
- Analicemos el número 18.

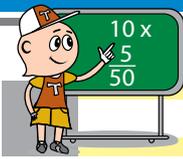
Descomposición canónica: $18 = 2^1 \times 3^2$

Número de divisores = $(1 + 1)(2 + 1) = 6$

Total de divisores = 6 $\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ simples } \left\{ \begin{array}{l} \text{La unidad} = 1 \\ \text{Los primos} = 2; 3 \end{array} \right. \\ 3 \text{ compuestos: } 6; 9; 18 \end{array} \right.$

Síntesis teórica





Aplica lo comprendido

- Los cinco primeros números primos son:
- Los cinco primeros números compuestos son:
- La descomposición canónica de 2 400 es:
- La descomposición canónica de 1 500 es:
- La cantidad de divisores de: $2^3 \times 3^2 \times 5^3$.



Aprende más

- La suma de los divisores primos de $6^8 \times 15^7$ es:
- ¿Cuántos números compuestos hay entre 40 y 50?
- La cantidad de divisores que tiene $6^2 \times 5^3 \times 14$ es:
- ¿Cuáles de los siguientes grupos de números son primos entre sí?
a) 24; 33; 45 b) 20; 32; 44 c) 18; 24; 30
d) 14; 35; 63 e) 15; 28; 32
- Determinar el exponente al que hay que elevar al número 15, para que el resultado tenga 64 divisores.
- ¿Cuáles de los siguientes números son primos entre sí?:
I. 24 II. 40 III. 45
- Determina la suma de los números menores que 30 y que sean primos con 18.
- Determina la cantidad de divisores primos de $6^n \times 15^m \times 14^p$.
- Determina la cantidad de divisores compuestos de 2 205.
- La suma de los divisores simples de $6^m \times 5^n \times 10^p$ es:
- Determinar la cantidad de divisores de $\overline{4a2}$, si uno de sus divisores es 9.
- ¿Cuántas parejas de números tienen como producto 24?
- ¿Cuántos divisores compuestos tiene 250?
- Los exponentes de la descomposición canónica de un número son 2 y 5. ¿Cuál es el menor número que cumple dicha condición?
- Hallar la suma de los divisores primos de 1 001.

Aplicación cotidiana

El número primo más grande

Un sistema de computadoras en red de la Universidad de California, ha encontrado el número primo más grande hasta el momento. El inmenso número está hecho de casi 13 millones de dígitos (12,978,189 para ser más exactos). El número es $2^{43112609} - 1$.

- Calcular el resto de dividir este número entre 4; 5; 8 y 25.

3 1 6 4 7 0 2 6 9 3 3 0 2 5 5 9 2 3 1 4 3 4 5 3 7 2 3 9 4 9 3 3 7 5 1 6 0 5 4 1 0 6 1 8 8 4 7 5 2 6 4 6
 4 4 1 4 0 3 0 4 1 7 6 7 3 2 8 1 1 2 4 7 4 9 3 0 6 9 3 6 8 6 9 2 0 4 3 1 8 5 1 2 1 6 1 1 8 3 7 8 5 6 7 2
 6 8 1 6 5 3 9 9 8 5 4 6 5 0 9 7 3 5 6 1 2 3 4 3 2 6 4 5 1 7 9 6 7 3 8 5 3 5 9 0 5 7 7 2 3 8 1 7 9 3 5 7
 9 0 0 8 7 6 4 2 6 1 0 3 9 4 3 7 8 2 3 7 6 4 9 4 5 9 1 7 4 2 9 3 4 5 8 8 4 9 7 1 1 7 5 8 7 1 4 6 9 1 6 9
 7 2 9 8 4 7 6 1 1 5 9 0 6 0 8 7 3 2 5 0 9 3 9 4 6 2 0 8 5 5 7 5 7 4 0 7 5 4 5 7 7 0 9 8 6 2 0 5 5 8 0 1
 1 7 7 9 5 2 9 8 8 4 0 4 2 1 9 8 2 8 7 6 4 3 3 1 9 3 3 0 4 6 5 0 6 4 4 5 5 2 3 4 9 8 8 1 4 2 1 3 9 5 6 5
 7 8 5 4 4 7 4 7 4 0 2 3 5 4 6 3 5 3 7 5 8 5 3 7 3 2 4 8 0 1 8 3 8 1 2 0 3 8 7 6 0 0 8 6 8 4 1 6 5 2 5 4
 0 0 7 9 0 3 8 1 2 8 5 8 8 8 2 5 6 6 8 7 0 8 5 8 5 5 4 5 6 2 3 1 5 7 7 5 2 7 9 3 9 3 0 5 9 2 0 8 1 1 7 6
 6 5 8 5 3 0 8 6 7 0 1 3 2 1 2 9 1 5 5 2 2 1 8 0 4 3 8 1 5 4 8 6 2 5 7 8 7 9 4 3 0 2 0 6 9 4 5 2 8 0 1 5
 9 9 9 2 2 1 7 1 8 1 9 1 5 5 7 7 6 1 ... (millones de números omitidos)... 0 6 9 9 3 4 1 5 9 7 0 9 8 0
 3 6 8 8 3 0 8 9 9 8 3 7 2 0 5 1 4 6 3 4 4 1 1 1 5 9 7 6 0 2 8 2 2 6 9 0 9 1 5 6 6 8 2 1 9 2 0 1 3 9 8 1
 8 3 0 8 2 2 0 1 4 0 4 6 1 0 6 6 0 9 1 1 2 9 0 3 4 2 0 3 6 5 8 6 0 8 1 2 5 3 3 5 5 0 7 9 2 4 0 7 4 4 2 6
 1 8 1 4 8 7 0 9 1 8 0 5 5 9 2 0 4 3 2 3 7 2 3 0 1 9 6 2 0 1 6 8 3 5 3 5 9 4 6 2 3 1 0 9 8 0 0 6 7 4 3 4
 9 8 4 6 2 5 3 8 0 7 8 7 2 4 7 8 0 2 5 3 2 7 5 8 5 1 1 3 3 3 5 0 2 4 6 0 7 7 8 8 8 4 3 3 9 0 3 4 0 1 9 7
 0 0 9 2 7 6 6 3 9 5 8 1 6 7 6 9 8 9 0 8 0 1 0 7 3 6 1 0 1 4 1 0 1 3 6 9 9 6 8 5 2 9 2 5 7 0 3 2 7 2 5 5
 3 5 4 4 6 2 2 4 6 4 6 8 5 9 2 8 7 0 7 5 2 6 5 6 8 1 0 5 9 9 3 6 8 9 9 1 5 2 1 8 0 7 3 8 0 1 4 4 3 4 0 4
 9 4 5 0 0 8 2 6 6 4 2 5 9 3 2 4 1 3 1 3 9 8 2 6 9 1 5 0 8 4 0 6 9 9 9 1 1 5 9 2 7 9 7 9 1 9 0 8 3 9 8 1
 3 0 2 2 3 3 0 4 8 2 4 0 8 3 1 1 9 0 9 3 1 9 5 9 9 8 0 1 4 5 6 2 4 5 6 3 4 7 9 4 1 2 0 2 1 9 5 9 0 0 9 2
 8 0 7 9 6 7 0 7 2 9 4 4 7 9 2 1 6 1 6 4 9 1 8 8 7 4 7 8 2 6 5 7 8 0 0 2 2 1 8 ...



¡Tú puedes!

- Hallar "n", si 189^n tiene 133 divisores.
 - 3
 - 4
 - 5
 - 6
 - 7
- La cantidad de veces que hay que multiplicar por 6 al número 12, para que el producto resultante tenga 42 divisores, es:
 - 3
 - 4
 - 5
 - 6
 - 7
- Si: $\overline{2xy3} = \overline{77}$ ($x > y$), halle la cantidad de divisores de $\overline{yx2}$.
 - 10
 - 12
 - 15
 - 14
 - 18
- Determinar el valor de "n", si el número $15^n \cdot 21$ tiene 20 divisores compuestos.
 - 1
 - 2
 - 3
 - 4
 - 5
- Si se sabe que: $10^1 \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot 10^4 \dots 10^n$ tiene 484 divisores, hallar "n".
 - 4
 - 6
 - 7
 - 11
 - 21



Practica en casa

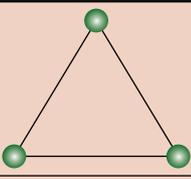
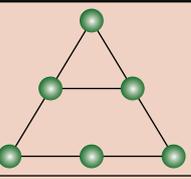
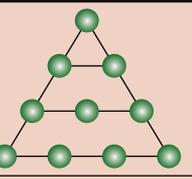
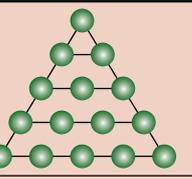
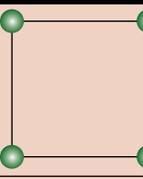
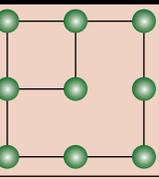
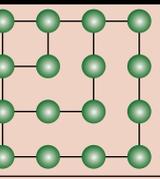
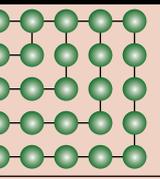
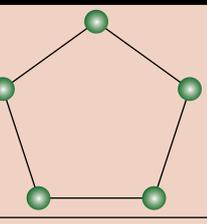
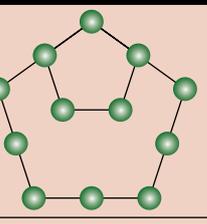
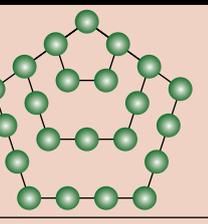
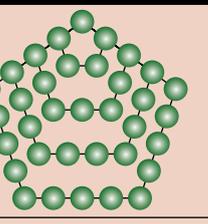
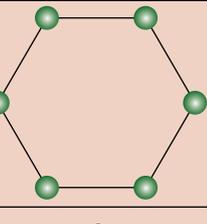
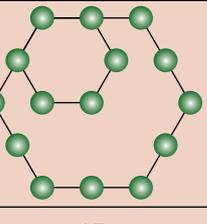
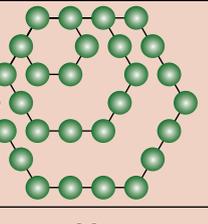
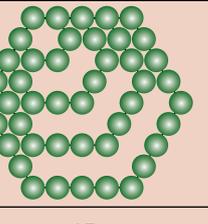
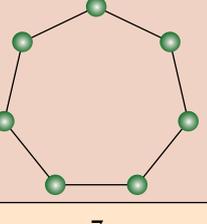
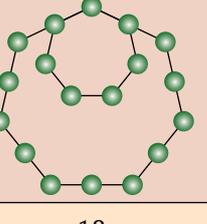
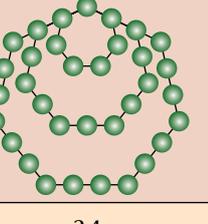
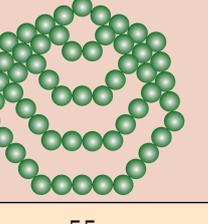
- Descomponer 90 en sus factores primos
- Si el número 600 se descompone en factores primos se obtiene: $2^n \times 3^m \times 5^p$. Hallar " $2n + 3m + 5p$ ".
- ¿Cuál es el menor número que sumado o restado de 71 da como resultado un número primo?
- ¿Cuántos divisores tiene el mayor número par de tres cifras?
- Determina la cantidad de divisores primos del número 9 999.
- ¿Cuántos números menores que 20 son P.E. Si con 15?
- ¿Cuántos divisores tiene 1 800?
- ¿Cuántos números menores que 25 son P.E. Si con 36?
- ¿Cuántos divisores tiene el número 875?
- Calcular "n", para que el número $2^n \times 3^n \times 5^2$ tenga 48 divisores.
- Calcular "n", para que el número $2^n \times 7^{n+1} \times 5^2$ tenga 90 divisores.
- Calcular "n", para que el número $2^2 \times 6^n$ tenga 35 divisores.
- Un número tiene dos divisores primos y 21 divisores en total. ¿Cuál es el menor número que cumple dicha condición?
- Uno de los divisores primos de $\overline{2x31}$ es el 7. ¿Cuántos divisores tiene en total el número?
- ¿Cuántos divisores tiene $\overline{51x}$, si uno de sus divisores es el 8?

Análisis de divisores

En este capítulo aprenderemos:

- A analizar los divisores por sus características .
- A clasificar los divisores.
- A determinar la suma y el producto de los divisores de un número

Números especiales

		Orden				
Tipo	1	2	3	4	5	
Triangulares						
Valor	1	3	6	10	15	
Cuadrados						
Valor	1	4	9	16	25	
Pentagonales						
Valor	1	5	12	22	35	
Hexagonales						
Valor	1	6	15	28	45	
Heptagonales						
Valor	1	7	18	34	55	

Representación de los números triangulares, cuadrados, pentagonales y hexagonales.

- ¿Cómo será el número piramidal?

Saberes previos

Completa con números:

Múltiplo de 12			Cuadrado de 23		Decena	
Múltiplo de 127			$4 + 5 \times 7$		Divisor universal	
			2 centenas			
			$7 \times 23 \times 37$			
	Múltiplo de todos					
	Mayor cifra					
	# que no es primo ni compuesto		Cuadrado de 2		L	
	# primo mayor que 23		Diez docenas		Menor # primo impar	
Mayor número primo de tres cifras		Menor # de cuatro cifras diferentes				Número primo
Primo par		Múltiplo de 11				Cuadrado de 6
		Número primo		Menor número primo		
		Divisor universal		Número primo		
	Menor # primo				6 docenas	
	Cuadrado de 4 más 1				Máx. # en el dado	

Conceptos básicos

Análisis de divisores

Cantidad de divisores

Sea: $N = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\delta$

$$\text{Número de divisores} = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\delta + 1)$$

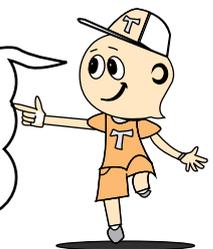
➔ Ejemplo:

- Del número 72:

Descomposición canónica: $72 = 2^3 \times 3^2$.

Número de divisores = $(3 + 1)(2 + 1) = 12$ divisores

Para aplicar esta fórmula, es necesario descomponer canónicamente el número



Clasificación de divisores

$$\text{Total de divisores} = \begin{cases} \text{Simples} = \begin{cases} \text{La unidad} \\ \text{Los primos} \end{cases} \\ \text{Compuestos} \end{cases}$$

Cantidad de divisores (condicional)

Sea el número: $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$.

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$$

$$(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24 \text{ divisores}$$

- $360 = 2(2^2 \times 3^2 \times 5^1)$
 $(2 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 18$ divisores múltiplos de 2
- $360 = 3(2^3 \times 3^1 \times 5^1)$
 $(3 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 16$ divisores múltiplos de 3
- $360 = 6(2^2 \times 3^1 \times 5^1)$
 $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12$ divisores múltiplos de 6
- $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$
 $(2 + 1)(1 + 1) = 6$ divisores no son pares
- $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$
 $(3 + 1)(1 + 1) = 8$ divisores no son múltiplos de 3

Suma de divisores

Sea: $N = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\delta$

$$\text{Suma de divisores} = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \times \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{\delta+1} - 1}{c - 1}$$

➔ Ejemplo:

- Del número 72:

Descomposición canónica: $72 = 2^3 \times 3^2$.

$$\text{Suma de divisores} = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \times \frac{3^3 - 1}{3 - 1} = 15 \times 13 = 195$$

Producto de divisores

Sea: $N = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\delta$

$$\text{Producto de divisores} = \sqrt{N^{(\alpha+1)(\beta+1)(\delta+1)}}$$

➔ Ejemplo:

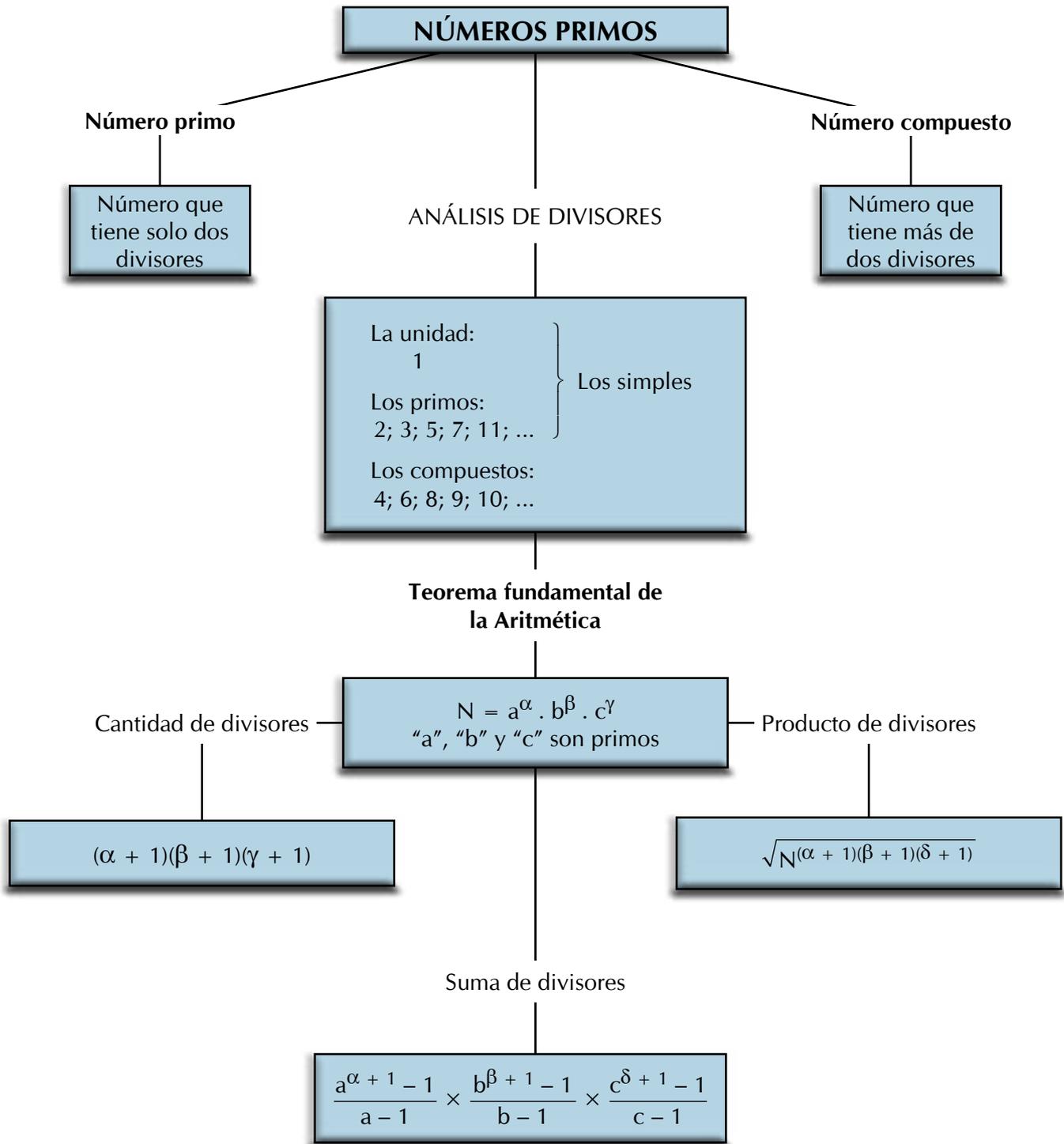
- Del número 72:

Descomposición canónica: $72 = 2^3 \times 3^2$.

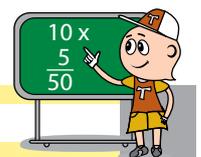
$$\text{Producto de sus divisores} = \sqrt{72^{(3+1)(2+1)}} = 72^6$$



Síntesis teórica



Aplica lo comprendido



1. ¿Cuántos divisores de 180 son pares?
2. ¿Cuántos divisores de 120 son múltiplos de 3?
3. ¿Cuántos divisores de 360 son múltiplos de 6?
4. ¿Cuál es la suma de los divisores de 36?
5. ¿Cuántos divisores de 400, son múltiplos de 10?



Aprende más

1. ¿Cuántos divisores de 900 son múltiplos de 3?
2. ¿Cuántos divisores de 2 250 son múltiplos de 15?
3. Calcule la suma de los divisores de 75.
4. Si el producto de los divisores de 12 es 12^n , hallar "n".
5. Con respecto al número 3 600, ¿cuántos de sus divisores son compuestos?
6. ¿Cuántos divisores de 500 son múltiplos de 4?
7. ¿Cuántos divisores compuestos tiene 450?
8. ¿Cuántos divisores de 600 son múltiplos de 3?
9. ¿Cuántos de los divisores de 8 100 no son divisibles entre 9?
10. Con respecto al número 8 100, ¿cuántos de sus divisores son múltiplos de 6?
11. Con respecto al número 3 600, ¿cuántos de sus divisores son impares?
12. Con respecto al número 3 600, ¿cuántos de sus divisores no son divisibles entre 12?
13. ¿El número 4 050 es múltiplo de cuántos números compuestos?
14. ¿Cuál es el menor número impar que posee 10 divisores?
15. ¿Cuántos divisores tiene $\overline{67x}$, si uno de sus divisores es el 8?

Aplicación cotidiana

Los números perfectos de Euler

Un número perfecto es igual a la suma de sus divisores positivos, sin incluirse él mismo (divisores propios).

Los divisores propios del 6 son 1; 2 y 3, la suma de ellos $1 + 2 + 3 = 6$, entonces el número 6 es perfecto.

Euclides demostró que la fórmula $2^{n-1}(2^n - 1)$ genera un número perfecto siempre que $2^n - 1$ sea primo.

16. Diga usted, ¿cuál es el siguiente número perfecto?

6



¡Tú puedes!

1. ¿Cuántos divisores de 500...000 (2 000 ceros) terminan en 5?
 - a) 2 000
 - b) 2 001
 - c) 2 002
 - d) 4 002
 - e) 4 000
2. Hallar "n", si 12^n tiene 190 divisores.
 - a) 6
 - b) 9
 - c) 5
 - d) 3
 - e) 7
3. ¿Cuántos rectángulos existen, tales que sus catetos sean enteros en metros y su área 60 m^2 ?
 - a) 6
 - b) 7
 - c) 8
 - d) 15
 - e) 12
4. Calcular el valor de "n", si $12^n \cdot 28$ tiene 72 divisores.
 - a) 1
 - b) 2
 - c) 3
 - d) 4
 - e) 5
5. ¿Cuántos ceros tiene $600\dots 0$, si su número de divisores es el séxtuplo del número de divisores de 600?
 - a) 5
 - b) 6
 - c) 7
 - d) 8
 - e) 9



Practica en casa

1. Descomponer 84 en sus factores primos.
2. La suma de los exponentes de la descomposición canónica de 2 400 es:
3. ¿Cuántos divisores tiene 720?
4. Determina el número de divisores compuestos de 4 500.
5. ¿Cuál es la cantidad de divisores de 450 que son múltiplos de 6?
6. Determina la suma de los divisores de 200
7. Determina el producto de divisores de 144
8. Hallar "n", si $2^n \times 3^n \times 5^4$ tiene 80 divisores.
9. Calcular la suma de los divisores de 300.
10. Hallar "n", si $2^n \times 3^{n+1}$ tiene 27 divisores compuestos.
11. Calcular la cantidad de divisores impares de 1 800.
12. Hallar "n", si $2^n \times 6^n$ tiene 66 divisores.
13. Determina la cantidad de divisores de 1 200 que son múltiplos de 3.
14. Hallar "n", si $2^n \times 15^2$ tiene 41 divisores compuestos.
15. Hallar "n", si 189^n tiene 133 divisores.

Repaso

Saberes previos

1. De 360:
 - a) Hallar la cantidad de divisores.
 - b) Hallar la suma de divisores.
 - c) Hallar la cantidad de divisores $\overset{\circ}{1}2$



Aprende más

- Para el número: $\overline{1800}$
 1. La suma de sus divisores primos es:
 2. La suma de sus divisores simples es:
 3. ¿Qué cantidad de divisores tiene?
- Dado el número: $\overline{3x5}$.
 4. Si es múltiplo de 9, el valor de "x" es:
 5. La suma de los exponentes de la descomposición canónica del número es:
 6. La suma de sus divisores primos es:
 7. La cantidad de sus divisores que son simples es:
 8. ¿Qué cantidad de divisores tiene el número?
- Dados los números: $A = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ y $B = 2^2 \cdot 3^4$
 9. La cantidad de divisores de "A" es:
 10. La cantidad de divisores de "B" es:
- Para el número: $\overline{3x7}$.
 11. Si es múltiplo de 9, el valor de "x" es:
 12. La suma de los exponentes de la descomposición canónica del número es:
 13. La suma de sus divisores primos es:
 14. La cantidad de sus divisores que son simples es:
 15. ¿Qué cantidad de divisores tiene el número?



Practica en casa

1. Calcular "x", si: $\overline{x245x} = \overset{\circ}{1}1$
2. ¿Cuántos divisores simples tiene $\overline{1a3a}$, si uno de sus divisores primos es 11?
3. ¿Cuántos divisores compuestos tiene 3 240?
4. ¿Cuántos divisores tiene 648?
5. Determinar la suma de valores de "x", si: $\overline{567x3} = \overset{\circ}{1}1$
6. Si el número $\overline{2x154}$ es múltiplo de 7, el valor de "x" es:
7. Determinar el valor de "x + y", si: $\overline{xxx37y} = \overset{\circ}{8}8$
 - De los números 48 y 54:
8. El menor de los divisores comunes es:
9. El mayor de los divisores comunes es:
- De los números 8 y 12:
 10. El menor número que es múltiplo de ambos es:
 11. La cantidad de números de dos cifras que son múltiplos de ambos es:
 12. ¿Cuántos divisores tiene 840?
 13. Calcular "x", si: $\overline{x3xx7x} = \overset{\circ}{9} + 2$.
 14. Determinar la suma de los valores de "x", si $\overline{431x} = \overset{\circ}{7}$.
 15. Determinar el valor de "a + b", sabiendo que el número $\overline{aab8b}$ es múltiplo de 5; 8 y 9.